ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

Կազմեց՝ Ռ.Ղազարյանը

2013թ.

ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Բնական թվերի N բազմությունում որոշված ֆունկցիան կոչվում է անվերջ թվային հաջորդականություն կամ պարզապես հաջորդականություն: Հաջորդականությունը ամեն մի n բնական թվի համապատասխանեցնում է որևէ իրական a_n թիվ: a_n-ը կոչվում է հաջորդականության ընդհանուր անդամ, n-ը՝ ինդեքս կամ համար:

Հաջորդականությունը կարելի է տալ բանաձևով, նկարագրելով, կամ անդրադարձ արտահայտությամբ:

Օրինակ 1. $a_n = \frac{1}{n}$ բանաձևով տրված հաջորդականությունը ամեն մի բնական թվի համապատասխանեցնում է նրա հակադարձը: Այդ հաջորդականությունն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots :$$

Այս հաջորդականության 10-րդ, 25-րդ և 100-րդ անդամները կլինեն $a_{10} = \frac{1}{10}; a_{25} = \frac{1}{25}$ և $a_{100} = \frac{1}{100}$ թվերը:

Օրինակ 2. $a_n = 1 + (-1)^n, n \in N$

Տրված բանաձևով կարող ենք գտնել հաջորդականության ցանկացած անդամը, օրինակ.

$a_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$, $a_2 = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$, $a_3 = 1 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$, $a_4 = 1 + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$ և այլն:

Հաջորդականությունն ունի հետևյալ տեսքը.

$$0; 2; 0; 2; \ldots$$

Օրինակ 3. $a_n = 3, n \in N$:

Այս հաջորդականության բոլոր անդամները իրար հավասար են՝

3; 3; 3;...

Նման հաջորդականությունները կոչվում են հաստատուն հաջորդականություններ:

Օրինակ 4. Գրել պարզ թվերի հաջորդականությունը:

Այս հաջորդականության ընդհանուր անդամի համար բանաձև հայտնի չէ: Սակայն մենք կարող ենք հաջորդաբար գտնել նրա ցանկացած անդամը՝

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; ...

Այս հաջորդականության մեծ համարներով անդամները գտնելը շատ դժվար է:

Օրինակ 5. Ենթադրենք հայտնի է, որ $a_1 = a_2 = 1$, իսկ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$:

Այս հաջորդականությունը կոչվում է Ֆիբոնաչիի հաջորդականություն, իսկ նրա անդամները՝ Ֆիբոնաչիի թվեր: Հաշվենք այս հաջորդականության առաջին մի քանի անդամները:

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$ և այլն:

Այսպիսով ստանում ենք հետևյալ հաջորդականությունը:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; ...

Օրինակ 6. $a_n = a_{n-1} + d, n \in N, n \geq 2$:

Այս անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, այն հայտնի է, եթե տրված են a_1-ը և d-ն՝ թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, ...$$

Դժվար չէ տեսնել, որ այս հաջորդականությունը կարելի է տալ նաև բանաձևով՝

$$a_n = a_1 + (n-1)d, n \geq 2:$$

Մասնավորապես, եթե $a_1 = 1$ և $d = 2$, ապա կստանանք կենտ թվերի հաջորդականությունը՝ 1, 3, 5, 7, ...:

Այստեղից n-րդ կենտ թվի համար ստանում ենք բանաձև՝ $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$:

$a_{14} = 2 \cdot 14 - 1 = 27$; $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$ և այլն:

Եթե ընդունենք $a_1 = 2$ և $d = 2$, ապա կստանանք զույգ թվերի հաջորդականությունը. 2; 4; 6; 8;...:

Նրա ընդհանուր անդամն ունի $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$ տեսքը: Օրինակ. $a_{45} = 2 \cdot 45 = 90$, $a_{50} = 2 \cdot 50 = 100$ և այլն:

Օրինակ 7. Դիցուք $b_n = b_{n-1} \cdot q$, որտեղ $b_1 \neq 0, q \neq 0, n \geq 2$: Այս անդրադարձ բանաձևով տրվում է երկրաչափական պրոգրեսիան՝ $b_1; b_1q; b_1q^2, ...$: Այստեղ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:

a_n հաջորդականությունը կոչվում է աճող, եթե $a_n < a_{n+1}, n = 1,2,3,...$:

Աճող հաջորդականության ցանկացած հաջորդ անդամը մեծ է իր նախորդ անդամից:

a_n հաջորդականությունը կոչվում է նվազող, եթե $a_n > a_{n+1}, n = 1,2,3,...$, այսինքն՝ ցանկացած նախորդ անդամը մեծ է իր հաջորդ անդամից:

Օրինակ 8. $a_n = \frac{n}{n+1}$ հաջորդականությունն աճող է, քանի որ $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} = a_n$: Իրոք,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$ ուստի՝ $a_{n+1} > a_n$:

Օրինակ 9. $a_n = \frac{1}{2n+1}, n \in N$:

Այս հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է: Իրոք,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0,$$ ուստի $a_n > a_{n+1}$:

a_n հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ ներքևից, եթե գոյություն ունի մի այնպիսի m թիվ, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի $a_n \geq m$ անհավասարությունը:

Եթե $a_n \leq M$, ցանկացած $n \in N$ համար, ապա հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ վերևից:

Իսկ եթե $m \leq a_n \leq M$, ցանկացած $n \in N$ համար, ապա a_n հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ:

Եթե ընդունենք $M_0 = \max\{|m|;|M|\}$, ապա կարելի է պնդել, որ $-M_0 \leq a_n \leq M_0$, այսինքն՝ հաջորդականությունը սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի $M_0 > 0$ թիվ այնպես, որ բոլոր n-երի համար տեղի ունի $|a_n| \leq M$ անհավասարությունը: Հակառակ դեպքում հաջորդականությունը կոչվում է անսահմանափակ, այսինքն՝ $\forall M > 0$ թվի համար $\exists$ (գոյություն ունի) $n(M)$, այնպես, որ $|a_n| > M$:

Օրինակ 10. $a_n = \dfrac{1}{n}, n \in N$:

Քանի որ $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$, ուրեմն այն սահմանափակ է:

Օրինակ 11. $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n}, n \in N$ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, քանի որ $2^{(-1)^n \cdot n} > 0$: Սակայն այն վերևից սահմանափակ չէ, քանի որ $a_{2k} = 2^{2k}$ զույգ ինդեքսով անդամները ցանկացած թվից կարող են մեծ դառնալ սկսած ինչ որ համարից:

Օրինակ 12. $a_n = \dfrac{3n-9}{n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Իրոք, $a_n = \dfrac{3n}{n} - \dfrac{9}{n} = 3 - \dfrac{9}{n}$ և հեշտ է տեսնել, որ $-6 \leq a_n < 3$:

Գրել հետևյալ հաջորդականությունների առաջին հինգ անդամները

1) $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$; 2) $a_n = \dfrac{n}{4^n}$; 3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3+4}$; 4) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3$; 5) $a_1 = 3, a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$:

Պարզել հաջորդականությունների մոնոտոնությունը

1) $a_n = \dfrac{3n-2}{n}$; 2) $a_n = \dfrac{n+5}{n}$; 3) $a_n = \dfrac{5-n^2}{n^2}$; 4) $a_n = \dfrac{2n^2+7}{n^2}$; 5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$; 6) $a_n = 2n^2 + 3n + 4$:

Ո՞ր հաջորդականություններն են սահմանափակ և որո՞նք՝ անսահմանափակ.

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$; 2) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; 3) $a_n = (-1)^n n$; 4) $a_n = \dfrac{3+(-1)^{n+1} \cdot 3}{2}$; 5) $a_n = \dfrac{4n}{3n+3}$; 6) $a_n = n!$; 7) $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{a_n + 4}{5}$; 8) $a_1 = 0; a_2 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$

Հաջորդականության սահմանը

Սահմանում: a թիվը կոչվում է a_n հաջորդականության սահման, եթե յուրաքանչյուր ε դրական թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի բնական N թիվ, որ ցանկացած n>N համար տեղի ունի $|a_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Եթե a թիվն a_n հաջորդականության սահմանն է, ապա գրում են

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ կամ } a_n \to a, \text{ երբ } n \to \infty:$$

Եթե հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման, ապա այն կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում կոչվում է տարամետ: Այլ կերպ ասած, a-ն a_n հաջորդականության սահմանն է, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպես, որ $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$:

Եթե վերջին անհավասարությունը գրենք բացված տեսքով՝ $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, ապա կստանանք $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, այսինքն՝ $a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ սկսած $n > N(\varepsilon)$ համարից: Երկրաչափորեն մեկնաբանելով կարող ենք ասել, որ եթե a-ն a_n հաջորդականության սահմանն է, ապա a-ի կամայական շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել միայն վերջավոր թվով a_n-եր: Հետևաբար, եթե a թվի որևէ շրջակայքից դուրս կան անվերջ թվով a_n անդամներ, ապա a թիվ a_n հաջորդականության սահմանը չէ: Օրինակ՝

$$1; -1; 1; -1; \ldots; (-1)^{n+1}, \ldots$$

հաջորդականությունը սահման չունի, քանի որ ցանկացած a թվի $\varepsilon = \frac{1}{2}$ շրջակայքը չի պարունակում 1 կամ -1 թվերից առնվազն մեկը, այսինքն $\left(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2}\right)$ շրջակայքից դուրս կան հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1. Եթե $x_n = a$, ապա $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a = a$: Իրոք, $\forall\varepsilon > 0$ $|x_n - a| = |a - a| < \varepsilon, n = 1,2,\ldots$:

Օրինակ 2. Ապացուցենք, որ $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}$:

Ցույց տանք, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար $\left|\frac{3n+1}{2n} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$, եթե վերցնենք $n > N(\varepsilon)$ համարից: Իրոք՝ $\left|\frac{(3n+1) - 3n}{2n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$: Որպես $N(\varepsilon)$ կարելի է վերցնել $\frac{1}{2\varepsilon}$ թվի ամբողջ մասը՝ $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$:

Մասնավորապես, եթե $\varepsilon_1 = 0{,}1$ կամ $\varepsilon_2 = 0{,}01$, կամ $\varepsilon_2 = 0{,}001$, ապա

$N(0{,}1)=\left[\frac{1}{2\cdot 0{,}1}\right]=5$, $N(0{,}01)=\left[\frac{1}{2\cdot 0{,}01}\right]=50$, $N(0{,}001)=\left[\frac{1}{2\cdot 0{,}001}\right]=500$:

Օրինակ 3. Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$: Դիտարկենք $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

$\frac{1}{2^n}<\varepsilon \Leftrightarrow 2^n>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$: Ընդունելով $N(\varepsilon)=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$, կստանանք $n>N(\varepsilon)\Rightarrow\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, որն էլ նշանակում է $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$:

Օրինակներ.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n}=3$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-5}{3n+2}=2$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2+4}=0$;

5) Ապացուցել, որ $a_n=2+(-1)^n 2$ հաջորդականությունը սահման չունի:

6) Ապացուցել, որ $a_n=10^{-n}$ հաջորդականությունն ունի սահման:

Թեորեմ. Եթե հաջորդականությունն ունի սահման, ապա այն սահմանափակ է:

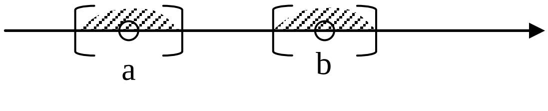
Իրոք, եթե $\varepsilon=1$, ապա $\exists N$, այնպես որ $n>N\Rightarrow a-1<a_n<a+1$, ուստի $(a-1,a+1)$ միջակայքից դուրս կարող են գտնվել միայն $a_1,a_2,...,a_n$ թվերը: Եթե նշանակենք $M=\max\{|a_1|,|a_2|,...,|a_N|,|a-1|,|a+1|\}$, ապա պարզ է, որ $|a_n|\le M, n=1,2,...$:

Հետևանք. Եթե հաջորդականությունն անսահմանափակ է, ապա այն սահման չունի:

Օրինակ՝ $1;2;\frac{1}{3};4;\frac{1}{5};6;...;n^{(-1)^n};...$ հաջորդականությունն անսահմանափակ է վերևից, հետևաբար սահման չունի:

Թեորեմ. Յուրաքանչյուր հաջորդականություն ունի ոչ ավելի, քան մեկ սահման, այսինքն, եթե $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ և $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, ապա $a=b$:

Իրոք, եթե ենթադրենք, որ $a\ne b$, ապա կարելի է ցույց տալ a և b թվերը պարունակող և իրար հետ չհատվող միջակայքեր, որտեղ պետք է միաժամանակ ընկնեն a_n անդամները՝ սկսած ինչ որ N համարից, իսկ դա անհնար է՝



Բերենք մի քանի թեորեմներ, որոնք հաճախ են օգտագործվում սահմաններ հաշվելիս:

Ենթադրենք $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ և $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$: Այդ դեպքում՝

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a+b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a-b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$

Հետևանք $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\cdot a$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}$, եթե $b_n\neq 0, b\neq 0$

5) Եթե $a_n\le c_n\le b_n$ և $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$:

Վայերշտրասի թեորեմը:

Յուրաքանչյուր մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականություն ունի սահման:

Օրինակ. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, երբ $|q|<1$: Ենթադրենք $q>0$: Այդ դեպքում $x_{n+1}=q^{n+1}=q^n\cdot q=q\cdot x_n<x_n$: Այսպիսով՝ $x_n=q^n$-ը մոնոտոն նվազող է և $q^n>0$՝ ներքևից սահմանափակ: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի այն ունի սահման՝ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=A$: Գտնենք A թիվը: Պարզ է, որ $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, այսինքն $A=\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}q\cdot q^n=q\lim\limits_{n\to\infty}q^n=q\cdot A$:

Այստեղից $A=qA\Rightarrow A(1-q)=0$:

Քանի որ $1-q\neq 0$, ուստի՝ $A=0$: Այժմ ենթադրենք $-1<q<0$: Այդ դեպքում $|q|<1$ և $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$:

Երբ $q=0\Rightarrow q^n=0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$: Այսպիսով՝ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$:

Օրինակ. Դիտարկենք $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ընդհանուր անդամով հաջորդականությունը: Գրենք նրա առաջին մի քանի անդամները՝

$$x_1=2; x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}; x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}; x_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256} \text{ և այլն:}$$

Հեշտ է տեսնել, որ $2<x_1<x_2<x_3<x_4$: Առանց ապացույցի նշենք, որ այն մոնոտոն աճող է և սահմանափակ՝ $2<x_n<3$:

Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի x_n հաջորդականությունն ունի սահման, որն ընդունված է նշանակել e-ով՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e:$$

Պարզ է, որ $2<e<3$: Այս թիվն իռացիոնալ է և նրա մոտավոր արժեքն է՝ $e\approx 2{,}718281828...$: Ընդունված է e հիմքով լոգարիթմը նշանակել՝ $\log_e a=\ln a$:

Օրինակներ սահմաններ հաշվելու վերաբերյալ:

Օրինակ 1. Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{7-9n}$ սահմանը:

Լուծում: Այստեղ քանորդի սահմանի մասին թեորեմը կիրառելի չէ, քանի որ համարիչը և հայտարարը տարամետ հաջորդականություններ են: Վարվենք հետևյալ կերպ. նախ, համարիչը և հայտարարը բաժանենք n-ի վրա, այնուհետև կիրառենք վերը նշված թեորեմները.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{7-9n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{\frac{7}{n}-9}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-9\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}9}=\frac{5+0}{0-9}=-\frac{5}{9}:$$

Օրինակ 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3n+4}{3n^2+5n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{4}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}+\frac{7}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}6-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{6-3\cdot 0+4\cdot 0}{3+5\cdot 0+7\cdot 0}=\frac{6}{3}=2:$$

Օրինակ 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5n}+\frac{3n}{2n+9}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+9}=0+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{9}{n}}=3\cdot\frac{1}{2+0}=\frac{3}{2}:$

Օրինակ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot n}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}:$

Օրինակ 5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{3}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}=\frac{4}{3}:$$

Այստեղ օգտվեցինք երկրաչափական պրոգրեսիայի $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ առաջին n անդամների գումարի բանաձևից:

Օրինակ 6.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1:$$

Օրինակ 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}:$

Օրինակներ

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n-7}{2n+3}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{5-2n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+4}{n^2-5n+16}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3-4n^2+7}{6n^3-100n+1}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}+\dfrac{5n+2}{n+4}\right)$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{n}-\dfrac{2n+1}{n^2}\right)$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n-5}\cdot\dfrac{4n^3+5}{n^3}\right)$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{-n}+5}{3^{-n}+4}\cdot\dfrac{8n+3}{10n}\right)$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9+\frac{9}{2}+\frac{9}{4}+\ldots+\frac{9}{2^n}}{10+\frac{10}{3}+\frac{10}{9}+\ldots+\frac{10}{3^n}}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\frac{5}{6}+\frac{25}{36}+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^n}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{1+5+9+\ldots+(4n-3)}$

ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Սահմանում: Եթե X թվային բազմության յուրաքանչյուր x թվի ինչ-որ օրենքով համապատասխանեցվում է որոշակի y թիվ Y բազմությունից, ապա ասում են X բազմությունում տրված է ֆունկցիա և նշանակում են $y=f(x)$:

f-ը խորհրդանշում է այդ օրենքը, x-ը կոչվում է անկախ փոփոխական կամ արգումենտ, y-ը՝ կախյալ փոփոխական: X բազմությունն անվանում են f ֆունկցիայի որոշման տիրույթ և նշանակում՝ $D(f)$: Եթե $x_0 \in D(f)$, ապա $f(x_0)=y_0$-ն ֆունկցիայի արժեքն է $x=x_0$ կետում: f ֆունկցիայի բոլոր արժեքների բազմությունը կոչվում է նրա արժեքների տիրույթ և նշանակվում՝ $E(f)$:

Պարզ է, որ $b \in E(f)$-ին նշանակում է $\exists a \in D(f)$ այնպես, որ $f(a)=b$:

Եթե իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում ֆունկցիան ընդունում է միևնույն արժեքը՝ $f(x)=C$, ապա այն կոչվում է հաստատուն ֆունկցիա:

Եթե f և g ֆունկցիաները որոշված են միևնույն X բազմությունում, ապա կարելի է սահմանել այդ ֆունկցիաների միջոցով $f+g, f-g, f\cdot g$ և $\frac{f}{g}$ նոր ֆունկցիաներ հետևյալ ձևով՝

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ և $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$, որտեղ $x \in X$:

Նշենք ֆունկցիայի տրման մի քանի եղանակներ:

1. Աղյուսակային եղանակ:

Եթե X բազմությունն ունի վերջավոր քանակությամբ տարրեր, ապա ամեն մի տարրի համար նշվում է ֆունկցիայի արժեքը: Օրինակ. $X=\{-1;0;2;3\}$

x	-1	0	2	3
y	5	-2	7	8

Աղյուսակից հասկանալի է, որ $f(-1)=5, f(0)=-2, f(2)=7$ և $f(3)=8$:

2. Անալիտիկ տրման եղանակ:

Այս դեպքում x կետում f ֆունկցիայի արժեքը հաշվելու համար տրվում է x-ից ինչ-որ արտահայտություն:

Օրինակ 1. $f(x)=x^2$ արտահայտությամբ տրված ֆունկցիան յուրաքանչյուր թվի համապատասխանեցնում է նրա քառակուսին՝

$$f(0)=0^2=0;\ f(2)=2^2=4;\ f(10)=10^2=100 \text{ և այլն:}$$

Օրինակ 2. $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ ֆունկցիայի արժեքները $x=0, x=2$ և $x=4$ կետերում կլինեն $f(0)=\frac{2\cdot 0+1}{0-1}=-1$; $f(2)=\frac{2\cdot 2+1}{2-1}=5$; $f(4)=\frac{2\cdot 4+1}{4-1}=3$:

Սակայն $x=1$ կետում այս արտահայտությունը կորցնում է իմաստը (0-ի վրա թիվը չի բաժանվում): Եթե նշված չէ f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, ապա որպես որոշման տիրույթ համարվում է տրված արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը: Օրինակ 1-ում դա կլինի իրական թվերի բազմությունը՝ $x \in (-\infty, \infty)$, իսկ օրինակ 2-ում՝ $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$:

Օրինակ 3. Գտնել $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը: Հաշվել $f(0), f(1)$ և $f(3)$ արժեքները:

Լուծում: Գտնենք $x^2 - 4 = 0$ հավասարման արմատները՝ $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$: Քանի որ $x = \pm 2$ արժեքների դեպքում կոտորակի հայտարարը դառնում է զրո, ուստի այդ արժեքները թույլատրելի չեն, հետևաբար՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝ $(-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ բազմությունը:

Հաշվենք նշված արժեքները:

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1}{1^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(3) = \frac{3 \cdot 3}{3^2 - 4} = \frac{9}{9 - 4} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Պարզենք ևս մեկ հարց, արդյոք ֆունկցիան ընդունում է 1 արժեքը, թե ոչ:

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{x^2 - 4} = 1 \Leftrightarrow 3x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1$, կամ $x = 4$:

Այսպիսով, տրված ֆունկցիան երկու անգամ՝ $x = -1$ և $x = 4$ կետերում, ընդունում է 1 արժեքը:

Օրինակ 4. Գտնել $f(x) = 2 + \frac{5}{x - 4}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը:

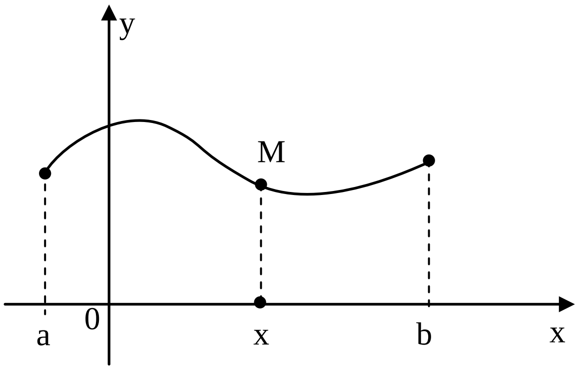
Լուծում: Պարզ է, որ $x - 4 \neq 0$, այսինքն՝ $x \neq 4$: Որոշման ըիրույթն է՝ $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$ բազմությունը: Գտնենք արժեքների բազմությունը: Ենթադրենք $b \in E(f)$: Սա նշանակում է $\exists x$ այնպես, որ $2 + \frac{5}{x - 4} = b$: Լուծենք այս հավասարումը:

$$2(x - 4) + 5 = b(x - 4) \Leftrightarrow (2 - b)x = 3 - 4b:$$

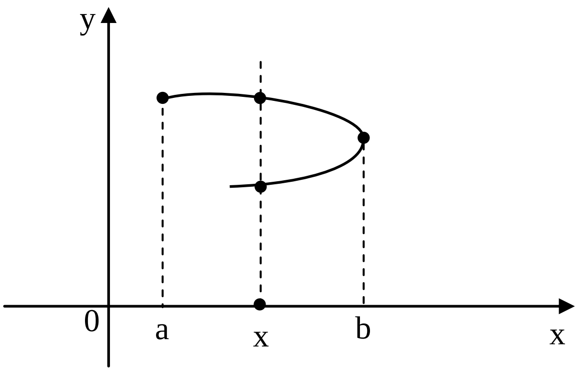
Եթե $2 - b \neq 0$, ապա $x = \frac{3 - 4b}{2 - b}$, ուստի $f(x)$ ընդունում է ցանկացած $b \neq 2$ արժեքը: Երբ $b = 2 \Rightarrow 0 \cdot x = -5$, որը լուծում չունի: Այսպիսով՝ $f(x) \neq 2$ և արժեքների տիրույթը կլինի $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ բազմությունը:

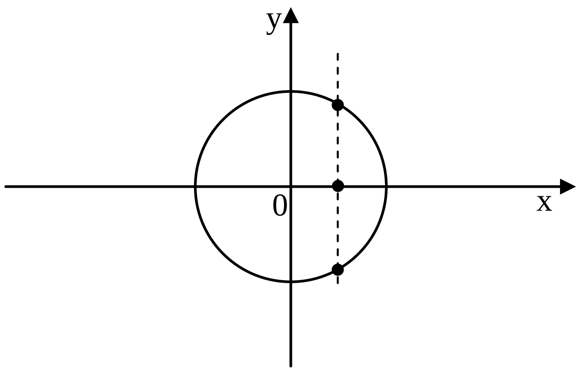
3. Ֆունկցիայի տրման գրաֆիկական եղանակը.

Հարթության վրա դիտարկենք xOy ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ և Ox առանցքի վրա՝ $[a, b]$ հատվածը:



Եթե հարթության վրա Γ կորը այնպիսին է, որ $[a,b]$ հատվածի ցանկացած x կետով անցնող և Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղը Γ կորը հատում է միայն մեկ կետում, ապա Γ-ն որոշում է մի $y=f(x)$ ֆունկցիա, որի համար Γ-ն կոչվում է գրաֆիկ: Γ կորը կազմված է $M(x,f(x))$ կետերի բազմությունից, այսինքն՝ այդ կետերի աբսցիսները անկախ փոփոխականի արժեքներն են, իսկ օրդինատները՝ $f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքները: Նշենք նաև, որ ոչ ամեն կորով կարելի է որոշել ֆունկցիա: Օրինակ, նկարներում պատկերված կորերը որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկներ չեն:





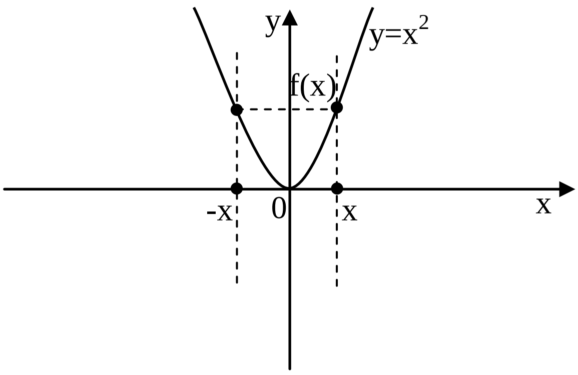
Այսուհետ կդիտարկենք անալիտիկորեն տրված ֆունկցիաները և նրանց գրաֆիկները:

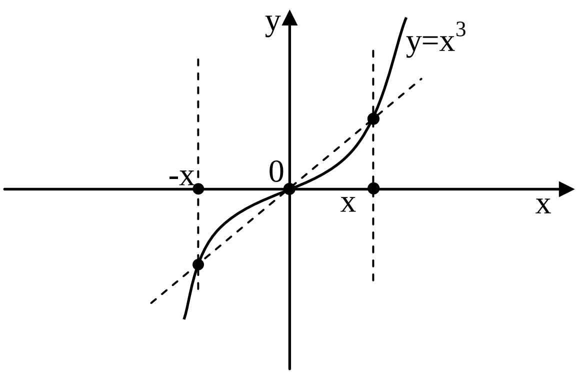
Սահմանում: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է զույգ կամ կենտ, եթե այն որոշված է $x=0$ կետի նկատմամբ համաչափ բազմությունում՝ $\forall x\in D(f)\Rightarrow -x\in D(f)$, և տեղի ունի $f(-x)=f(x)$ (զույգ) կամ $f(-x)=-f(x)$ (կենտ) հավասարությունը:

Զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ, իսկ կենտ ֆունկցիայինը՝ O սկզբնակետի նկատմամբ:

Օրինակ: $f(x)=x^2$ ֆունկցիան զույգ է, քանի որ $D(f)=R$ և $\forall x\in R\Rightarrow -x\in R$:

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$





Օրինակ: $f(x)=x^3$ ֆունկցիան կենտ է, քանի որ $D(f)=R$ և $\forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x)=(-x)^3=(-1\cdot x)^3=(-1)^3\cdot x^3=-x^3=-f(x),\ f(-x)=-f(x)$:

Օրինակ: $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $f(x)=\cos x, f(x)=x^{2n}$ և $f(|x|)$ ֆունկցիաները զույգ են (n-ը բնական թիվ է) $f(x)=\sin x, f(x)=x\sqrt{1+x^2}, f(x)=x^{2n+1}$ և $x\cdot f(|x|)$ ֆունկցիաները կենտ են:

Համոզվենք նշվածներից երկուսի ճշտության մեջ.

ա) $y=f(|x|)$:

Պարզ է, որ եթե $x\in D(y)$, ապա $-x\in D(y)$: Իրոք $x\in D(y)\Rightarrow |x|\in D(f)\Rightarrow |-x|\in D(f)\Rightarrow -x\in D(y)$: Բայց $y(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=y(x)$, այսինքն` y-ը զույգ ֆունկցիա է:

բ) $y=x\sqrt{1+x^2}$: $D(y)=R$ և $\forall x\in R\Rightarrow -x\in R$

Հաշվենք $f(-x)$-ը:

$f(-x)=(-x)\sqrt{1+(-x)^2}=-x\sqrt{1+x^2}=-f(x)$:

Ստացանք $f(-x)=-f(x)$, այսինքն ֆունկցիան կենտ է:

Հեշտ է համոզվել, որ երկու զույգ կամ երկու կենտ ֆունկցիաների արտադրյալը զույգ ֆունկցիա է, իսկ մեկ զույգ և մեկ կենտ ֆունկցիաների արտադրյալը` կենտ: Իրոք, եթե $f(x)$-ը զույգ է, իսկ $\varphi(x)$-ը` կենտ, ապա

$y=f(x)\cdot\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար $\forall x\in D(f)\cap D(\varphi)\Rightarrow -x\in D(f)\cap D(\varphi)$ և $y(-x)=f(-x)\cdot\varphi(-x)=f(x)\cdot(-\varphi(x))=-f(x)\cdot\varphi(x)=-y(x)$, այսինքն $y(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է: Նույն ձևով ապացուցվում են մնացած պնդումները:

Օրինակներ

Պարզել նշված ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որո՞նք` կենտ, և որո՞նք են ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ:

1. $f(x)=x^2+|x|$
2. $f(x)=1+\cos 2x$
3. $f(x)=x\sin 3x$
4. $f(x)=x^5 \mathrm{tg} 2x$
5. $f(x)=x^3-3x$
6. $f(x)=4x^5+3x^9$
7. $f(x)=x^2\sin x$
8. $f(x)=x^3\cos x$
9. $f(x)=\mathrm{tg}x\cos 3x$
10. $f(x)=x\sin x^4$
11. $f(x)=\mathrm{tg}^2x-x^4+2$
12. $f(x)=x^3-2x^2+1$
13. $f(x)=\frac{5}{4x}$
14. $f(x)=\frac{3x}{x-5}$
15. $f(x)=2x+3$
16. $f(x)=\sin(2x+5)$

Սահմանում: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե $\exists T \neq 0$ թիվ այնպես, որ $\forall x \in D(f) \Rightarrow x \pm T \in D(f)$ և $f(x+T)=f(x)$:

T-ն կոչվում է f ֆունկցիայի պարբերություն:

Օրինակ. $f(x)=\sin x$ և $f(x)=\cos x$ ֆունկցիաները պարբերական են, քանի որ $T=2\pi$ թվի և $\forall x \in R$ համար տեղի ունեն $\sin(x+2\pi)=\sin x$ և $\cos(x+2\pi)=\cos x$ հավասարությունները:

Օրինակ. $y=\operatorname{tg}x$ ֆունկցիան նույնպես պարբերական է, նրա որոշման տիրույթը $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$ թվերի բազմությունն է և $T=\pi$ թվի համար $\forall x \in D(y) \Rightarrow x+\pi \in D(y)$, այսինքն՝ $x+\pi \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$: Բացի այդ, $\forall x \in D(y) \Rightarrow \operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg}x$:

Օգտվեցինք $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ և $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ բերման բանաձևերից:

Եթե $T \neq 0$ թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի պարբերությունն է, ապա $n \cdot T$ թվերը, որտեղ $n \in Z$ ամբողջ թիվ է, նույնպես պարբերություն են: Սա նշանակում է, որ ֆունկցիայի պարբերությունների մեջ չկա ամենամեծը և չկա ամենափոքրը:

Եթե ֆունկցիայի դրական պարբերությունների մեջ կա ամենափոքրը՝ $T_0 \neq 0$, ապա այն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերություն:

$\sin x$ և $\cos x$ ֆունկցիաների հիմնական պարբերությունը $T_0=2\pi$-ն է, իսկ $\operatorname{tg}x$ և $\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիաներինը՝ $T_0=\pi$-ն:

Օրինակ: Գտնել $f(x)=\sin 3x$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

Քանի որ $D(f)=R$, մնում է ստուգել $f(x+T_0)=f(x)$ պայմանի ճշտությունը բոլոր $x \in R$ համար:

$$f(x+T_0)=\sin 3(x+T_0)=\sin(3x+3T_0)$$

$\sin(3x+3T_0)=\sin 3x \quad \forall x \in R$, հետևաբար $3T_0=2\pi$, այսինքն՝ $T_0=\frac{2\pi}{3}$:

Օրինակ: $f(x)=\sin^2 x$: Գտնել հիմնական պարբերությունը:

$$\sin^2(x+T)=\sin^2 x, \forall x \in R:$$

$$\frac{1-\cos 2(x+T)}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow \cos(2x+2T)=\cos 2x \Rightarrow 2T=2\pi \Rightarrow T=\pi:$$

x թվի ամբողջ մաս կոչվում է այդ թիվը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը և նշանակվում է $[x]$:

Օրինակ: 1) $[3,4]=3$; 2) $[4]=4$; 3) $[-3,2]=-4$:

x թվի կոտորակային մասը այդ թվի և նրա ամբողջ մասի տարբերությունն է՝ $\{x\}=x-[x]$:

Օրինակ: 1) $\{2,7\}=2,7-[2,7]=2,7-2=0,7$

2) $\{5\}=5-[5]=5-5=0$

3) $\{-3,4\}=-3,4-[-3,4]=-3,4-(-4)=-3,4+4=0,6$

Թվի կոտորակային մասը ոչբացասական թիվ է:

$f(x)=\{x\}$ ֆունկցիան պարբերական է և նրա հիմնական պարբերությունը՝ $T_0=1$: Իրոք, եթե T-ն պարբերությունն է, ապա $\{T\}=\{0+T\}=\{0\}=0 \Rightarrow T$ ամբողջ թիվ է:

Մյուս կողմից $\{x+1\}=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=\{x\}$: Քանի որ 1-ը ամենափոքր դրական ամբողջ թիվն է, ուստի $T_0=1$:

Կան ֆունկցիաներ, որոնք պարբերական են, սակայն չունեն հիմնական պարբերություն: Այդպիսին է, օրինակ, Դիրիխլեի ֆունկցիան՝

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{եթե } x-\text{ը ռացիոնալ թիվ է}\\ 0, \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ թիվ է}:\end{cases}$$

Հեշտ է համոզվել, որ ցանկացած ռացիոնալ թիվ՝ $T=\frac{m}{n}$, ֆունկցիայի պարբերությունն է:

Իրոք, եթե x-ը ռացիոնալ է, ապա $x+T$-ն նույնպես ռացիոնալ թիվ է, ուստի $f(x+T)=1=f(x)$:

Եթե x-ը իռացիոնալ է, ապա $x+T$-ն, որպես ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի գումար, նույնպես իռացիոնալ է: Իրոք, հակառակ դեպքում կստանանք

$x+\frac{m}{n}=\frac{p}{q} \Rightarrow x=\frac{p}{q}-\frac{m}{n} \Rightarrow x=\frac{pn-mq}{nq}$, այսինքն x-ը ռացիոնալ թիվ է, որը հակասում է պայմանին: Այսպիսով՝ $f(x+T)=0=f(x)$:

Ստացվեց, որ $\forall x \in R \Rightarrow f(x+T)=f(x)$, այսինքն $\forall T$ ռացիոնալ թիվ Դիրիխլեյի ֆունկցիայի պարբերությունն է: Բայց ռացիոնալ թվերի մեջ չկա ամենափոքր դրական թիվը: Իրոք, եթե $\frac{m}{n}>0$, ապա $\frac{m}{n}>\frac{m}{2n}>0$, որտեղ $\frac{m}{2n}$ ռացիոնալ և ավելի փոքր դրական թիվ է:

Օրինակներ

Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

1. $f(x)=\sin 2x$
2. $f(x)=\cos 3x$
3. $f(x)=\sin \pi x$
4. $f(x)=\cos\frac{\pi x}{3}$
5. $f(x)=\sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x$
6. $f(x)=\mathrm{tg}4x$

Սահմանում: f ֆունկցիան կոչվում է X բազմությունում աճող (նվազող), եթե կամայական x_1 և $x_2 \in X$ թվերի համար $x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, $f(x_1)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(x_2))$:

Ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող), եթե այն աճող է (նվազող է) իր որոշման տիրույթում: Նման ֆունկցիաներին անվանում են մոնոտոն ֆունկցիաներ, իսկ այն միջակայքերը, որտեղ ֆունկցիան մոնոտոն է՝ մոնոտոնության միջակայքեր:

Օրինակ. $f(x)=x^2$ ֆունկցիան մոնոտոն նվազում է $(-\infty;0]$ միջակայքում և մոնոտոն աճում՝ $[0;\infty)$ միջակայքում: Իրոք, եթե $0\le x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$ $f(x)=x^2$ աճում է $x\in[0;\infty)$-

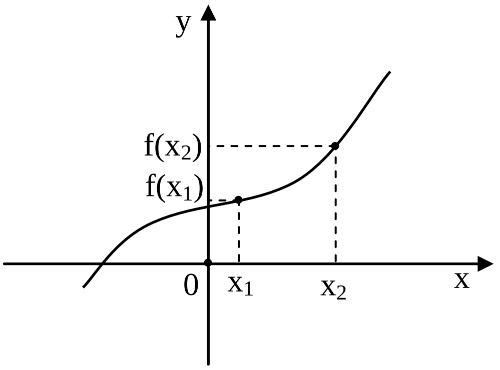
ում:

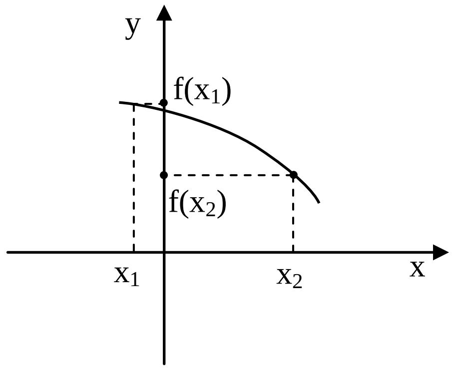
Եթե $x_1 < x_2 \le 0 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \ge 0 \Leftrightarrow (-x_1)^2 > (-x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ այսինքն՝ $f(x) = x^2$ մոնոտոն նվազող է $(-\infty;0]$ միջակայքում:

Օրինակ: $f(x) = x^3$ ֆունկցիան աճող է $x \in R$-ում: Եթե $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$: Եթե $x_1 < x_2 \le 0 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \ge 0 \Leftrightarrow (-x_1)^3 > (-x_2)^3 \ge 0 \Rightarrow$ $-x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow x_1^3 > x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$:

Այս ֆունկցիաների գրաֆիկները բերված են վերևում:

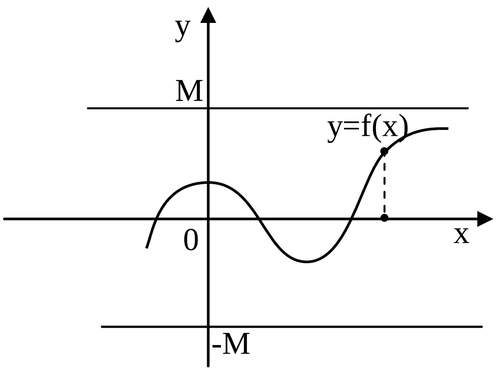
Աճող ֆունկցիայի գրաֆիկի վրայով դեպի աջ շարժվելիս կետը բարձրանում է վեր, իսկ նվազող ֆունկցիայի գրաֆիկի վրայով դեպի աջ շարժվելիս՝ իջնում է:

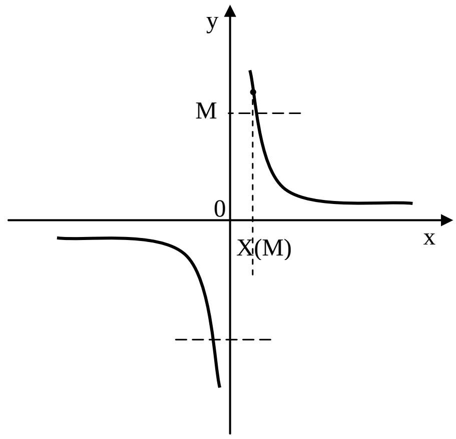




Ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ, եթե $\exists M > 0$ թիվ այնպես, որ $\forall x \in D(f) \Rightarrow |f(x)| \le M$:

Եթե f ֆունկցիան անսահմանափակ է, դա նշանակում է, որ $\forall M > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $X(M)$ թիվ, որ տեղի ունի $|f(x_{(M)})| > M$ անհավասարությունը:





Հիմնական տարրական ֆունկցիաներ

Հիմնական տարրական ֆունկցիաներն են՝

1. $y = x^{\alpha}$ աստիճանային ֆունկցիան, որտեղ $\alpha \in R$:

2. $y = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան, որտեղ $a \ne 1$ և $a > 0$:

3. $y = \log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիան, որտեղ $a \ne 1$ և $a > 0$:

4. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝ $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$:

5. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝ $y = \arcsin x, y = \arccos x$, $y = arctgx, y = arcctgx$:

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է a կետի մի որոշ շրջակայքում, բացի, թերևս a կետից: B թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ x-ը ձգտում է a-ին, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta(\varepsilon) > 0$, որ $0 < |x - a| < \delta$ անհավասարությանը բավարարող բոլոր x-երի համար տեղի ունի $|f(x) - B| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Այդ դեպքում գրում են $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, կամ՝ $f(x) \to B$, երբ $x \to a$:

Օրինակ 1. Հաստատուն ֆունկցիայի սահմանը հավասար է հենց այդ հաստատունին՝ եթե $f(x) = C$, ապա $\lim\limits_{x \to a} C = C$: Իրոք, $\forall \varepsilon > 0$ համար $|f(x) - C| = |C - C| < \varepsilon$ բոլոր x-երի համար a կետի որոշ շրջակայքից: Հետևաբար, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} C = C$:

Օրինակ 2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$:

Դիցուք $f(x) = x$ և $\varepsilon > 0$: $|f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$: Հետևաբար, եթե $\delta = \varepsilon$, ապա $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$, որն էլ նշանակում է, որ $\lim\limits_{x \to a} x = a$:

Օրինակ 3. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x \to a} 4x = 12$: Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ թիվ և դիտարկենք $|f(x) - 12| < \varepsilon$ անհավասարումը, որտեղ $f(x) = 4x$: $|4x - 12| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$: Եթե ընդունենք $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, ապա $|x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 12| < \varepsilon$: Պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 4. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$:

Լուծում: Քանի որ սահմանը հաշվելիս $x \neq 2$ (x=2 կետում ֆունկցիան որոշված չէ), ուստի $\forall \varepsilon > 0$ համար $|f(x) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon$ կամ $|(x + 2) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon$:

Եթե ընդունենք $\delta = \varepsilon$, ապա բոլոր x-երի համար $0 < |x - a| < \delta$ շրջակայքում տեղի ունի $|f(x) - 4| < \varepsilon$ անհավասարությունը, որն էլ նշանակում է $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$:

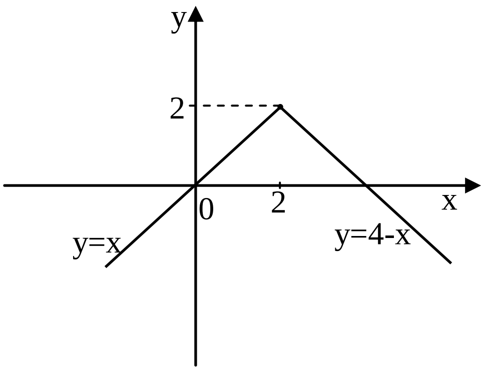
Եթե ֆունկցիայի սահմանը հաշվելիս x-ը ձգտում է a-ին միշտ մնալով նրանից ձախ (աջ), ապա այդպիսի սահմանը կոչվում է ձախակողմյան (աջակողմյան) և նշանակվում է՝ $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a - 0)$ (ձախակողմյան սահման) և $\lim\limits_{x \to a + 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a + 0)$ (աջակողմյան սահման):

Որպեսզի a-կետում ֆունկցիան ունենա B սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f(a - 0) = f(a + 0) = B$, այսինքն պետք է գոյություն ունենան ձախ և աջ սահմանները և լինեն իրար հավասար:

Օրինակ. $f(x)=\begin{cases} x, \text{երբ } x \le 2 \\ 4-x, \text{երբ } x > 2 \end{cases}$

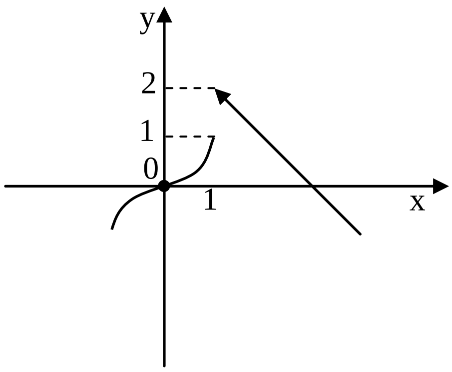
Հաշվենք ձախ և աջ սահմանները:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x = 2, \quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (4-x)=2$$



Քանի որ աջ և ձախ սահմանները հավասար են, ուստի ֆունկցիան ունի սահման, երբ $x\to 2$ և $\lim_{x\to 2} f(x)=2$:

Օրինակ. $f(x)=\begin{cases} x^3, \text{երբ } x \le 1 \\ 3-x, \text{երբ } x > 1 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x^3=1$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} (3-x)=2$$

Քանի որ աջ և ձախ սահմանները հավասար չեն, ուստի ֆունկցիան սահման չունի, երբ $x\to 1$:

Օրինակ. $f(x)=\{x\}$ (x-ի կոտորակային մաս): Պարզենք սահմանի գոյությունը a=5 կետում:

$\lim_{x\to 5-0}\{x\}=1$, $\lim_{x\to 5+0}\{x\}=0$, $f(5-0)\ne f(5+0) \Rightarrow a=5$ կետում ֆունկցիան սահման չունի:

Թեորեմ. Ֆունկցիան կետում չի կարող ունենալ երկու տարբեր սահմաններ:

Ապացույց: Եթե ենթադրենք, որ $\lim_{x\to a} f(x)=A$ և $\lim_{x\to a} f(x)=B$, որտեղ $A\ne B$, ապա $\forall\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է գտնել $\delta_1(\varepsilon)>0$ և $\delta_2(\varepsilon)>0$ թվեր այնպես, որ $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ և $|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon$: Այդ դեպքում $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$-ի և $0<|x-a|<\delta$ համար կունենանք $|A-B|=|(A-f(x))+(f(x)-B)|\le|A-f(x)|+|B-f(x)|<2\varepsilon$:

Եթե վերցնենք $\varepsilon = \frac{1}{4}|A-B|$, ապա կստանանք $|A-B| < \frac{1}{2}|A-B|$, որը հնարավոր չէ: Այս հակասությունից էլ հետևում է, որ $A = B$:

Թեորեմ: Եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, որտեղ A-ն վերջավոր թիվ է, ապա a թվի որոշ շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է՝ $|f(x)| \le M, \forall x \in (a-\delta, a+\delta), x \ne a$:

Իրոք, եթե վերցնենք $\varepsilon = 1$, ապա նրա համար կգտնվի $\delta(\varepsilon) > 0$, այնպես, որ $0 < |x-a| < \delta$ անհավասարությանը բավարարող բոլոր x-երի համար տեղի ունի $1 > |f(x) - A| > |f(x)| - |A|$ կամ $|f(x)| < 1 + |A| = M$:

Առանց ապացույցի բերենք ևս մի քանի կարևոր թեորեմներ:

Թեորեմ: Եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, որտեղ $A \ne 0$, ապա a-ի որոշ շրջակայքում $f(x)$-ն ունի A-ի նշանը:

Թեորեմ: Եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ և $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, ապա

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

Հետևանք: $\lim\limits_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, եթե $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$

4) Եթե $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = B$ և a կետի որոշ շրջակայքում, բացի թերևս x=a կետից, տեղի ունի $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ անհավասարությունը, ապա $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$:

Ապացույց: Յանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $\delta_1(\varepsilon) > 0$ և $\delta_2(\varepsilon) > 0$ այնպիսի թվեր, որ $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |\varphi(x) - B| < \varepsilon$ և $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(x) - B| < \varepsilon$: Եթե վերցնենք $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, ապա $0 < |x-a| < \delta$ պայմանից կհետևի $B - \varepsilon < \varphi(x) < B + \varepsilon$ և $B - \varepsilon < \psi(x) < B + \varepsilon$ անհավասարումների ճշմարտացիությունը: Բայց ըստ պայմանի $B - \varepsilon < \varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) < B + \varepsilon$; այսինքն՝ $B - \varepsilon < f(x) < B + \varepsilon$, որն էլ նշանակում է, որ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$:

Բերենք սահմաններ հաշվելու մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1. Հաշվել $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 5)$ սահմանը:

Լուծում: $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 5) = \lim\limits_{x\to 2} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 4x + \lim\limits_{x\to 2} 5 = 3\lim\limits_{x\to 2} x \cdot \lim\limits_{x\to 2} x - 4\lim\limits_{x\to 2} x + 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 5 = 9$:

Օրինակ 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x+5}{2x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)} = \frac{4\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 5}{2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 3} = \frac{4 \cdot 1 + 5}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{9}{5}$:

Օրինակ 3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$:

Այստեղ քանորդի սահմանի մասին թեորեմը կիրառելի չէ, քանի որ հայտարարը և համարիչը x=1 կետում դառնում են զրո: Այսպիսի արտահայտությունները կոչվում են $\frac{0}{0}$ տիպի անորոշություններ, իսկ սահմանի հաշվումը՝ անորոշության բացում:

Վարվենք հետևյալ կերպ. համարիչը և հայտարարը վերլուծենք արտադրիչների՝ $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ և $x^2-1=(x-1)(x+1)$:

Քանի որ սահմանը հաշվելիս, երբ $x\to 1$ x-ը չի ընդունում x=1 արժեքը, ուստի $x-1\neq 0$ և կոտորակը կարելի է կրճատել $x-1$ արտադրիչով՝

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}4}{\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1}=\frac{1-4}{1+1}=-\frac{3}{2}:$$

Օրինակ 4. Գտնել $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2-3x-14}$ սահմանը:

Նորից ունենք $\frac{0}{0}$ տիպի անորոշություն: Համարիչը և հայտարարը վերլուծենք արտադրիչների: Դրա համար գտնենք նրանց արմատները՝

$$2x^2-3x-14=0 \qquad\qquad x^2-4=0$$
$$x_1=-2,\quad x_2=\frac{7}{2} \qquad \text{և} \qquad x_{1,2}=\pm 2$$

Օգտվենք $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ կանոնից՝

$$2x^2-3x-14=2(x+2)\left(x-\frac{7}{2}\right);\ x^2-4=(x+2)(x-2):$$

Այսպիսով՝

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2-3x-14}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{2(x+2)\left(x-\frac{7}{2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -2}(2x-7)}=\frac{-4}{-11}=\frac{4}{11}:$$

Օրինակ 5.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2+2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}x}=\frac{4+4+4}{2}=6:$$

Օրինակ 6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}1=1+1=2:$$

Օրինակ 7.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9x+18}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)(x-3)(x-6)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2})^2-1}{(x-3)}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)(x-6)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2-1}{x-3}\cdot\frac{1}{(1+1)(3-6)}=-\frac{1}{6}:$$

Օրինակներ

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{x^2-25}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2-6}{2x^2-3x-5}$

Դիտարկենք նաև ֆունկցիայի սահմանն անվերջությունում և ֆունկցիայի անվերջ սահմանի դեպքերը:

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է կամ ամբողջ թվային առանցքի վրա, կամ $|x|>a>0$ բոլոր արժեքներում (անվերջության շրջակայքում):

B թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x\to\infty$, եթե $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $\exists M>a>0$ թիվ այնպես, որ բոլոր x-երի համար, որոնք բավարարում են $|x|>M$ պայմանին, տեղի ունի $|f(x)-B|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

Այդ դեպքում գրում են` $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=B$:

Օրինակ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x}$:

Ցույց տանք, որ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=3$: Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon>0$ թիվ և կազմենք $|f(x)-3|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

$$\left|\frac{3x-2}{x}-3\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{3x-2-3x}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2}{|x|}<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\frac{2}{\varepsilon}:$$

Այսպիսով, եթե ընդունենք $M=\dfrac{2}{\varepsilon}$, ապա $|x|>M\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon$, որն էլ նշանակում է, որ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=3$:

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում ուսումնասիրել ֆունկցիայի վարքը, երբ $x\to+\infty$ կամ $x\to-\infty$: Այդ սահմանները կարող են լինել տարբեր:

Օրինակ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+5}}{x}=4$, իսկ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+5}}{-|x|}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{16x^2+5}{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}=-4:$$

A թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x\to+\infty$ դեպքում, եթե $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $\exists M>0$ թիվ այնպես, որ $\forall x>M\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$: Նույն ձևով՝ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$ թվի համար $\exists M>0$ այնպես, որ $\forall x<-M\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$:

Օրինակ. $\lim\limits_{x\to+\infty}10^{-x}=0$, քանի որ $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $\left|10^{-x}-0\right|<\varepsilon$, եթե $10^{-x}<\varepsilon\Leftrightarrow-x<\lg\varepsilon\Leftrightarrow x>\lg\frac{1}{\varepsilon}$: Այստեղ կարելի է որպես M վերցնել $M=\lg\frac{1}{\varepsilon}$ թիվը:

Օրինակ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, քանի որ $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon$:

Քանի որ $|\sin x|\le1$, ուստի, եթե $\frac{1}{|x|}<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon$:

Բայց $\frac{1}{|x|}<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\frac{1}{\varepsilon}$ և որպես M կարելի է վերցնել $M=\frac{1}{\varepsilon}$ թիվը: Այսպիսով՝ $|x|>M=\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$:

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անվերջ մեծ, երբ $x\to a$, եթե $\forall M>0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta(M)>0$, որ $\forall x:0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M$:

Այդ դեպքում գրում են $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$:

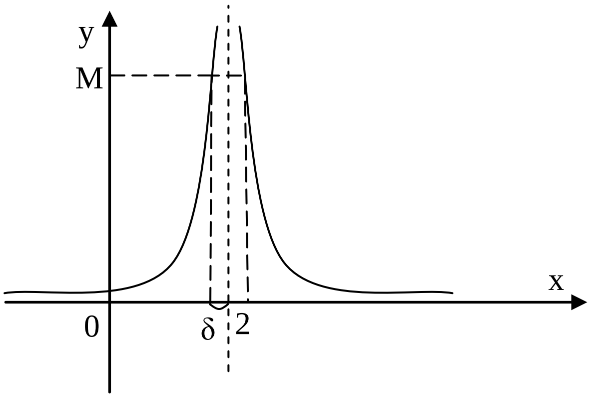
Կարելի է դիտարկել նաև $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ և $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$, ինչպես նաև $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\pm\infty$ և $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\pm\infty$ դեպքերը: Օրինակ՝ $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$, նշանակում է $\forall M>0$ թվի համար $\exists\delta(M)>0$ թիվ, այնպես, որ բոլոր x-երի համար, որոնք բավարարում են $a<x<a+\delta$ պայմանին, տեղի ունի $f(x)>M$ անհավասարությունը: Բերենք անվերջ մեծ ֆունկցիաների մի քանի օրինակներ:

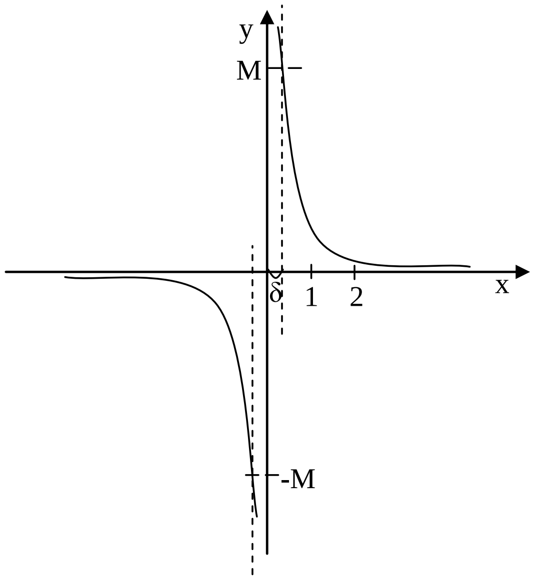
Օրինակ: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}\to+\infty$, երբ $x\to2$: Իրոք, ցանկացած $M>0$ թվի համար տեղի ունի $\frac{1}{(x-2)^2}>M$, եթե միայն $(x-2)^2<\frac{1}{M}$, կամ $|x-2|<\frac{1}{\sqrt{M}}=\delta$:

Օրինակ. $f(x)=\frac{1}{x}$: Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$:

Իրոք, ցանկացած M>0 թվի համար կունենանք $\left|\frac{1}{x}\right|>M$, եթե $0<|x|<\frac{1}{M}=\delta$:

Ընդ որում $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{1}{x}=-\infty$ և $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{1}{x}=+\infty$:





Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջության, երբ $x \to \infty$, ապա գրում են $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$: Սա նշանակում է՝ է $\forall M > 0$ թվի համար $\exists N > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $\forall x$-ի համար, որտեղ $|x| > N$, տեղի ունի $|f(x)| > M$ անհավասարությունը:

Կարելի է դիտարկել նաև հետևյալ սահմանները.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ և այլն:

Օրինակ, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$, իսկ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ և $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$:

Վարժություններ

Հաշվել հետևյալ սահմանները:

Օրինակ 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{4x+5}$:

Այստեղ քանորդի սահմանի մասին թեորեմը կիրառելի չէ, քանի որ և' համարիչը, և' հայտարարը անվերջ մեծ են: Նման դեպքերում ասում են ունենք $\frac{\infty}{\infty}$ տիպի անորոշություն:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}}=\frac{3-0}{4+0}=\frac{3}{4}:$$

Օրինակ 2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+4}{(x+3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+4}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+9\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{5-3\cdot0+4\cdot0}{1+6\cdot0+9\cdot0}=5:$$

Օրինակ 3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{10x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(10+\frac{7}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{10+\frac{7}{x^2}}=\infty\cdot\frac{1}{10}=\infty$$

Օրինակ 4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{100x+17}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(100+\frac{17}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{100+\frac{17}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0\cdot100=0:$$

Օրինակներ

Հաշվել հետևյալ սահմանները.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+6}{2x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{x^2+100}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x+1}{10x^2+20}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+7x+6}{x^6}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+10}{(2x+1)^2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-2)^2}{(2x+3)^2}$

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անվերջ փոքր, երբ $x\to a$ կամ $x\to\infty$, եթե $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ կամ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$: Անվերջ փոքրերի օրինակներ են $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ ֆունկցիաները, երբ $x\to0$,

$g(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x-2)^3$ ֆունկցիաները, երբ $x\to 2$, $f(x)=\cos x$, երբ $x\to\frac{\pi}{2}$:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի B սահման, երբ $x\to a$ կամ $x\to\infty$, ապա $f(x)=B+\alpha(x)$, որտեղ $\alpha(x)$-ը անվերջ փոքր է՝ երբ $x\to a$ կամ $x\to\infty$: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ եթե $f(x)=B+\alpha(x)$, որտեղ $\alpha(x)$-ը անվերջ փոքր է՝ երբ $x\to a$ կամ $x\to\infty$, ապա $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$ կամ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=B$:

Օրինակ. $f(x)=4+\frac{1}{x}$:

Քանի որ $\frac{1}{x}\to 0$, երբ $x\to\infty$, ուստի $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)=4$:

Օրինակ. $f(x)=\frac{5x^2+3}{x^2}$:

Քանի որ $f(x)=\frac{5x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}=5+\frac{3}{x^2}$, ուստի $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=5$:

Հեշտ է տեսնել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարը անվերջ փոքր ֆունկցիա է: Իրոք, երկու գումարելիների դեպքում՝ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$ և եթե $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ և $\lim\limits_{x\to a}(x)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=0$:

Հաստատունի և անվերջ փոքրի արտադրյալը անվերջ փոքր ֆունկցիա է՝

$$\lim_{x\to\infty}Cf(x)=C\lim_{x\to\infty}f(x)=C\cdot 0=0:$$

Սահմանափակ ֆունկցիայի և անվերջ փոքրի արտադրյալը անվերջ փոքր է: Իրոք, եթե $|g(x)|<M$ $x=a$-ի որոշ շրջակայքում և $f(x)\to 0$, երբ $x\to a$, ապա $0\le|f(x)\cdot g(x)|\le M|f(x)|$: Բայց $\lim\limits_{x\to a}Mf(x)=M\lim\limits_{x\to a}f(x)=M\cdot 0=0$, ուստի, ըստ միջանկյալ ֆունկցիայի սահմանի մասին թեորեմի, $\lim\limits_{x\to a}|f(x)g(x)|=0$, այստեղից՝ $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=0$:

Օրինակ. $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to 0$, քանի որ $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$, իսկ $x\to 0$:

Օրինակ, $g_1(x)=\frac{\cos x}{x}$, կամ $g_2(x)=\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիաները անվերջ փոքր են, երբ $x\to\infty$, քանի որ $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$, իսկ $\frac{1}{x}\to 0$, երբ $x\to\infty$:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to a$ և $x=a$ կետի մի որոշ շրջակայքում զրո չի դառնում, ապա նրա հակադարձը՝ $\frac{1}{f(x)}$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է: Ճիշտ է նաև հակադարձը՝ $x=a$ կետում կամ $x=\infty$-ում անվերջ մեծ $g(x)$ ֆունկցիայի հակադարձը՝ $\frac{1}{g(x)}$-ը անվերջ փոքր ֆունկցիա է:

Իրոք, եթե $f(x)$-ը անվերջ փոքր է, ապա $\forall M>0$ թվի համար $\exists\delta(M)>0$ այնպես, որ $\forall x$:

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\frac{1}{M}$: Բայց սա նշանակում է $\frac{1}{|f(x)|}>M$, այսինքն՝ $\frac{1}{f(x)}$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է:

Հակադարձ թեորեմը ապացուցվում է նմանապես: Այս թեորեմը սիմվոլիկ կարելի է գրել այսպես՝ $\frac{1}{0}=\infty$ կամ $\frac{1}{\infty}=0$ տեսքով:

Օրինակ. $f(x)=(x-3)^2$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to 3$, ուստի $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x-3)^2}\to\infty$, երբ $x\to 3$:

Օրինակ: $f(x)=x^3$-ը անվերջ մեծ է, երբ $x\to\infty$, ուստի $\frac{1}{x^3}$-ը անվերջ փոքր է, երբ $x\to\infty$, այսինքն՝ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0$:

Այժմ ուսումնասիրենք երկու անվերջ փոքրերի զրոյի ձգտելու վարքը, երբ $x\to a$ կամ $x\to\infty$ դեպքերում:

Ենթադրենք $f(x)\to 0$ և $g(x)\to 0$, երբ $x\to a$ կամ $x\to\infty$:

Սահմանում: Եթե $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, ապա $f(x)$ և $g(x)$-ը կոչվում են միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր:

Օրինակ 1. $f(x)=3x+4x^2$ և $g(x)=2x+x^3$ ֆունկցիաները անվերջ փոքր են, երբ $x\to 0$:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+4x^2}{2x+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(3+4x)}{x(2+x^3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(3+4x)}{\lim\limits_{x\to 0}(2+x^3)}=\frac{3}{2}$, ուստի $f(x)$-ը և $g(x)$-ը միևնույն կարգի անվերջ փոքր են:

Օրինակ 2. $f(x)=\frac{3}{x^2+2x}$ և $g(x)=\frac{4}{5x^2+6}$:

Պարզ է, որ $f(x)\to 0$ և $g(x)\to 0$, երբ $x\to\infty$: Քանի որ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2+2x}:\frac{4}{5x^2+6}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4}\cdot\frac{5x^2+6}{x^2+2x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}=\frac{15}{4}\neq 0,$$

ուստի $f(x)$ և $g(x)$-ը նույն կարգի անվերջ փոքր են:

Սահմանում: Եթե $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, ապա $f(x)$ անվերջ փոքրը կոչվում է $g(x)$ անվերջ փոքրի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքր, իսկ $g(x)$-ը՝ $f(x)$-ի նկատմամբ ցածր կարգի անվերջ փոքր:

Օրինակ, $f(x)=x^5$ և $g(x)=10x^4$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{10x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{10}=0:$$

x^5-ը $10x^4$-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքր է: Ընդհանրապես, եթե $m>n$, ապա x^m-ը x^n-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքր է, երբ $x\to 0$:

Սահմանում: Եթե $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, ապա $f(x)$ և $g(x)$ անվերջ փոքրերը կոչվում են համարժեք անվերջ փոքրեր:

Օրինակ. $f(x)=4x+3x^2$ և $g(x)=4x-5x^3$ ֆունկցիաները համարժեք անվերջ փոքրեր են, երբ $x\to 0$, քանի որ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+3x^2}{4x-5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4+3x)}{x(4-5x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+3x}{4-5x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(4+3x)}{\lim\limits_{x\to 0}(4-5x^2)}=\frac{4}{4}=1:$$

Օրինակ. $\alpha(x)=\frac{1}{x^2}$ և $\beta(x)=\frac{3}{3x^2+x}$ ֆունկցիաները անվերջ փոքր են, երբ $x\to\infty$: Հաշվենք նրանց հարաբերության սահմանը.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3x^2+x}{3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{3}=\frac{3}{3}=1:$$

Քանի որ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, ուստի նրանք համարժեք անվերջ փոքր են, երբ $x\to\infty$:

Թեորեմ: Եթե $f(x)$-ը և $g(x)$-ը համարժեք անվերջ փոքրեր են, ապա նրանց $f(x)-g(x)$ տարբերությունը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան նրանցից յուրաքանչյուրը:

Իրոք, եթե $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, ապա $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\left(\frac{f(x)}{f(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1-\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{g(x)}{f(x)}=1-1=0:$

Օրինակ. $g(x)=x$ և $f(x)=x+5x^3$-ը համարժեք անվերջ փոքր են, երբ $x\to 0$: Իրոք, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+5x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+5x^2)=1$: Սակայն նրանց տարբերությունը՝

$f(x)-g(x)=(x+5x^3)-x=5x^3$ և $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, այսինքն՝ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան նրանցից յուրաքանչյուրը:

Թեորեմ. Եթե $\alpha(x)$-ը համարժեք է $\alpha_1(x)$-ին, իսկ $\beta(x)$-ը՝ $\beta_1(x)$-ին, երբ $x\to a$, ապա

ա) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\alpha(x))=\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\alpha_1(x))$

բ) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha_1(x)}$

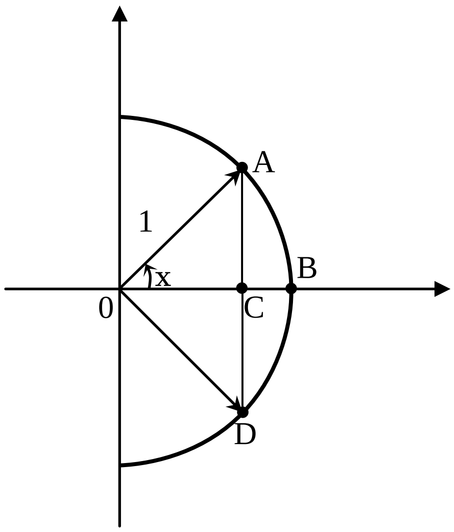
գ) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

Այստեղ պետք է հասկանալ, որ աջ կողմի սահմանների գոյությունից հետևում է, որ ձախ կողմում գրված սահմանները գոյություն ունեն և հավասար են նրանց արժեքներին:

Այժմ հաշվենք մի քանի կարևոր սահմաններ:

Օրինակ. Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$:

Դիտարկենք $R=1$ շառավղով շրջանի $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ կենտրոնական անկյունով շրջանային ABD աղեղը և AD լարը:



$$AD=2AC=2\cdot|\sin x|;$$
$$\cup ABD=2|x|$$

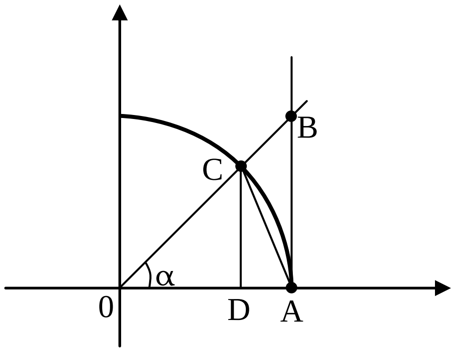
Պարզ է, որ $AD<\cup ABD\Rightarrow 0<2|\sin x|<2|x|\Leftrightarrow 0<|\sin x|<|x|$: Քանի որ $|x|\to 0$, ուստի ըստ միջանկյալ ֆունկցիայի սահմանի մասին թեորեմի $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$:

Օրինակ. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}=1-2\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1-2\cdot 0\cdot 0=1$$

Օրինակ. Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$:

Ենթադրենք $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ և դիտարկենք $R=1$ շառավղով շրջանագիծը:



Նկարից պարզ է, որ $S_{\Delta OAC} < S_{\text{սեկտոր}} < S_{\Delta OAB}$, այսինքն՝

$\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\alpha < \frac{1}{2}OA\cdot\cup AC < \frac{1}{2}OA\cdot AB$: Բայց $AB = OA\cdot tg\alpha = 1\cdot tg\alpha$ և $\cup AC = \alpha$, ուստի ստանում ենք $\sin\alpha < \alpha < tg\alpha$:

Բաժանելով $\sin\alpha$-ի վրա կստանանք. $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$ կամ $1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$:

Բայց նախորդ օրինակում տեսանք, որ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, ուստի $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$:

Քանի որ $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim\limits_{\substack{-\alpha\to 0\\ -\alpha>0}}\frac{\sin(-\alpha)}{(-\alpha)} = 1$, ուստի պնդումը ապացուցված է:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ երբ $x\to 0$, $\sin x$ ֆունկցիան ի ր արգումենտին՝ x-ին համարժեք անվերջ փոքր է: Օգտվելով այս սահմանից և անվերջ փոքրերի մասին թեորեմներից կարող ենք բավականին հեշտությամբ հաշվել նոր սահմաններ:

Օրինակ 1: Հաշվել $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ սահմանը:

Քանի որ $\sin 3x \sim 3x$, երբ $x\to 0$, ուստի $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}3 = 3$:

Օրինակ 2: Հաշվել $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}$ սահմանը, որտեղ $k = const$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgkx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x\cos kx} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{x}\cdot\frac{1}{\cos kx} = \lim_{x\to 0}k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx} = k\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx} = k\cdot 1 = k:$$

Օրինակ 3: Հաշվել $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$ սահմանը:

Քանի որ $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, ուստի

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{4x}{2}}{x^2} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)^2}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}4 = 8:$$

Օրինակ 4: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$:

Օրինակ. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos(\pi-x)}{(\pi-x)^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\frac{\pi-x}{2}}{(\pi-x)^2}=2\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2}{(\pi-x)^2}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$:

Օրինակ 5:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x-\frac{\pi}{2}\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{\pi}:$$

Մենք արդեն գիտենք, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$: Պարզվում է, որ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, կամ որ նույնն է՝ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$: Մենք այն չենք ապացուցի:

Օրինակներ:

Հաշվել սահմանները

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-3x+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{2x+x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{1-\sin x}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cos 4x-\cos 8x}{x-2}$

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետում և նրա որոշ շրջակայքում:

Սահմանում: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ x_0 կետում, եթե այդ կետում նրա սահմանը գոյություն ունի և հավասար է այդ կետում ֆունկցիայի արժեքին՝

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$:

Սա նշանակում է, որ $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $\exists\delta(\varepsilon)>0$, այնպես որ $\forall x: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$:

Անընդհատությունը տրված x_0 կետում կարելի է ձևակերպել նաև այլ ձևերով՝

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right):$$

Սա նշանակում է, որ անընդհատ ֆունկցիայի սահմանը հաշվելիս կարելի է նրա արգումենտը փոխարինել սահմանային արժեքով:

Եթե նշանակենք $x-x_0=\Delta x$, որը արգումենտի աճն է, իսկ $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$, որը կոչվում է ֆունկցիայի աճ, ապա կարելի է տեսնել, որ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=0$

$\lim\limits_{x-x_0\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$ կամ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$, այսինքն՝ անընդհատ ֆունկցիայի աճը ձգտում է զրոյի՝ երբ արգումենտի աճը ձգտում է զրոյի: Այլ կերպ ասած՝ արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճ:

$f(x)$ ֆունկցիան $x=x_0$կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝ $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$:

Եթե $f(x_0-0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$, ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ ձախից, իսկ եթե $f(x_0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$, ապա այն կոչվում է անընդհատ աջից:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է (a,b) միջակայքի յուրաքանչյուր կետում, ապա այն կոչվում է անընդհատ (a,b) միջակայքում: Ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $[a,b]$ հատվածում, եթե այն անընդհատ է (a,b) միջակայքում և a կետում անընդհատ է աջից, իսկ b-ում՝ ձախից:

Օրինակ 1. $f(x)=C$ հաստատուն ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած x_0 կետում: Իրոք՝ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} C=C=f(x_0)$

Օրինակ 2. $f(x)=x$ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է ցանկացած x կետում:

$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x$ և $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$:

Օրինակ 3. $f(x)=\sin x$ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած $x\in R$ կետում: Իրոք՝

$|\Delta f(x)|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\right|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$:

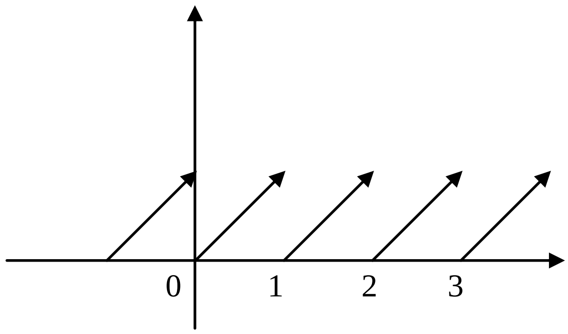
Բայց, ինչպես տեսել ենք $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$, ուստի $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$, այսինքն $\sin x$-ը անընդհատ ֆունկցիա է ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Օրինակ 4. $f(x)=\{x\}$ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած կետում, բացի ամբողջ թվերից: Ամբողջ թվերում $\{x\}$-ը անընդհատ է աջից: Իրոք՝ $f(n)=0$ և $f(n+\Delta x)=\{n+\Delta x\}=\{\Delta x\}$, եթե $\Delta x>0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\Delta f(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\{\Delta x\}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\Delta x=0:$$

$\{x\}$ ֆունկցիան ձախից անընդհատ չէ, քանի որ $\Delta f(n)=\{n+\Delta x\}-\{n\}=\{n+\Delta x\}=$ $=\{n\}+\{\Delta x\}=0+\Delta x-[\Delta x]=\Delta x-(-1)=\Delta x+1$, եթե $-1<\Delta x<0$ և $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\Delta f(x)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}(\Delta x+1)=1\neq 0$:

$y=\{x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի հետևյալ տեսքը՝



Օրինակ 5. $f(x)=\operatorname{sign}x$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում անընդհատ չէ: Իրոք,

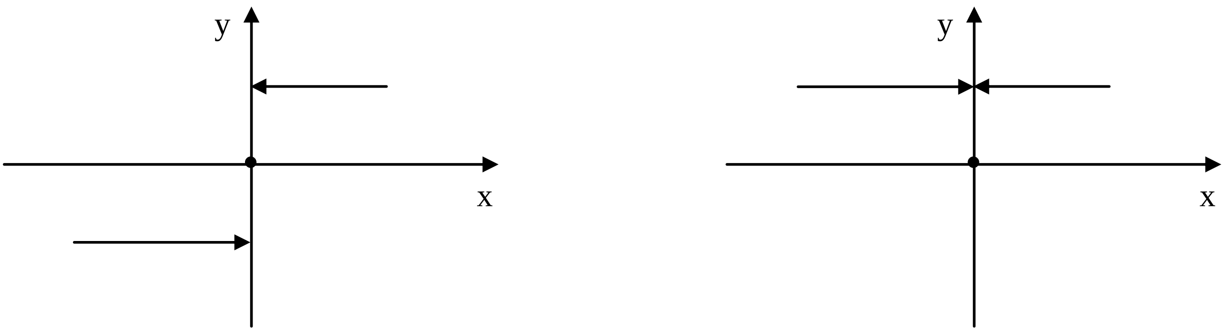
$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & \text{երբ}\quad x>0\\ 0, & \text{երբ}\quad x=0\\ -1, & \text{երբ}\quad x<0\end{cases}:$$

Հաշվենք $x_0=0$ կետում աջ և ձախ սահմանները՝

$$f(+0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1;\ f(-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-1)=-1:$$

Քանի որ այս սահմանները հավասար չեն, ուստի ֆունկցիան $x_0=0$ կետում սահման չունի, հետևաբար անընդհատ չէ:

Բերենք $f(x)=\operatorname{sign}x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝



Օրինակ 6. $f(x)=|\operatorname{sign}x|$ ֆունկցիան նույնպես $x_0=0$ կետում անընդհատ չէ, քանի որ $f(+0)=f(-0)\neq f(0)$:

Օրինակ 7. $f(x)=\frac{1}{x-2}$ ֆունկցիան $x_0=2$ կետում անընդհատ չէ, քանի որ այդ կետում նա որոշված չէ:

Եթե x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր աջ և ձախ սահմանները, բայց՝ կամ $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$, կամ $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը $x=x_0$ կետում որոշված չէ, կամ $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$, ապա x_0-ն կոչվում է առաջին սեռի խզման կետ: Իսկ եթե աջ և ձախ սահմաններից գոնե մեկը անվերջ է կամ գոյություն չունի՝ x_0-ն կոչվում է երկրորդ սեռի խզման կետ:

Վերը նշված օրինակներում 4-6-ում ֆունկցիաներն ունեն առաջին սեռի խզման կետեր, իսկ օրինակ 7-ում խզումը երկրորդ սեռի է:

Օրինակ 8. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ ֆունկցիան x_0 կետում որոշված չէ, հետևաբար՝ խզվող է: Պարզենք $x_0=0$ կետում խզման բնույթը:

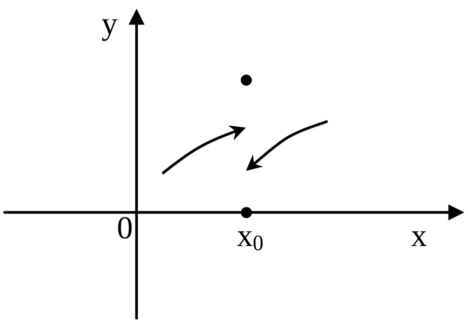
Եթե $x>0$, ապա $\frac{1}{x}>0$ և $\frac{1}{x}\to+\infty$, երբ $x\to0$: Այդ դեպքում $f(+0)=\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$, քանի որ $2^u\to+\infty$, երբ $u\to+\infty$:

$f(-0)=\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$, քանի որ $2^u\to0$, երբ $u\to-\infty$: Այսպիսով՝ $x_0=0$ կետում խզումը երկրորդ սեռի է:

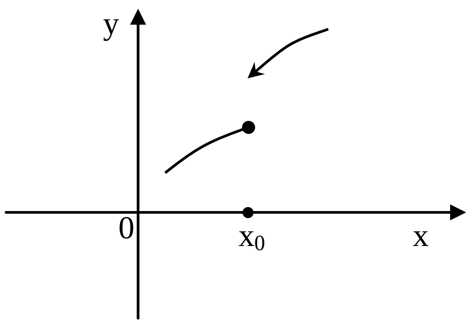
Օրինակ 9. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան x_0 կետում խզվող է, և այդ խզումը երկրորդ սեռի է: Իրոք, եթե վերցնենք $x_n=\frac{1}{\pi n}\to0$ հաջորդականությունը, ապա $\lim\limits_{x_n\to0}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi n=0$: Իսկ եթե $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\to0$, երբ $n\to\infty$, ապա $\lim\limits_{x_n\to0}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$: Սա նշանակում է, որ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի սահմանը՝ երբ $x\to0$, գոյություն չունի, հետևաբար $x=0$-ն երկրորդ սեռի խզման կետ է:

Առաջին սեռի խզման կետերը կարելի է սխեմատիկորեն պատկերել հետևյալ կերպ.

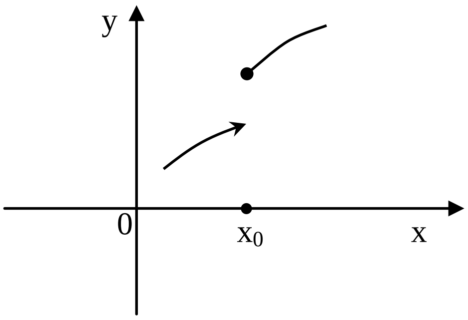
1) $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)\neq f(x_0)$



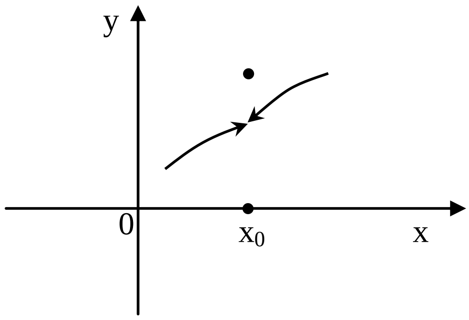
2) $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)=f(x_0)$



3) $f(x_0-0) \neq f(x_0+0) = f(x_0)$

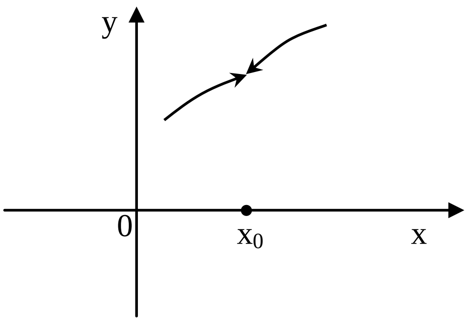


4) $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$



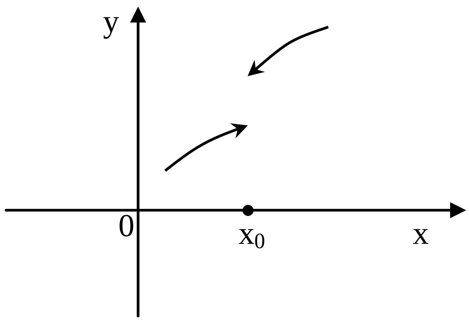
5) $f(x_0+0) = f(x_0-0)$

x_0-ում $f(x)$-ը որոշված չէ



6) $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$

x_0-ում $f(x)$-ը որոշված չէ



4-րդ և 5-րդ դեպքերում կարելի է խզումը վերացնել, եթե վերցնենք $f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0-0)$:

Նշենք հետևյալ կարևոր թեորեմները.

Թեորեմ. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $x=x_0$ կետում, ապա նրանց գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը (եթե $g(x_0)\neq 0$) նույնպես անընդհատ են այդ կետում:

Այս թեորեմի ապացույցը հետևում է սահմանների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմներից:

Թեորեմ. Եթե $f(u)$ ֆունկցիան անընդհատ է $u=a$ կետում, իսկ $u=\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=x_0$ կետում և $\varphi(x_0)=a$, ապա $F(x)=f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $x=x_0$ կետում:

Իրոք՝ $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to a} f(u)=f(a)=f(\varphi(x_0))=F(x_0)$: Այստեղ օգտվեցինք այն բանից, որ $\varphi(x)\to a$, երբ $x\to x_0$ և $f(u)$-ի անընդհատությունից $u=a$ կետում:

Նշենք նաև, որ մեզ հայտնի բոլոր տարրական ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթի ցանկացած կետում:

Օրինակ, $f_1(x)=\sin x, f_2(x)=\cos x$ ֆունկցիաները անընդհատ են $x\in(-\infty,\infty)$ ցանկացած կետում; $f(x)=\mathrm{tg}x$-ը անընդհատ է $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ ցանկացած կետում: $f(x)=\mathrm{ctg}x$-ը՝ $x\neq\pi k$ կետերում և այլն:

Օրինակ. $y=\sin^2 x^3$ ֆունկցիան անընդհատ է x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, քանի որ $y=u^2$, որտեղ $u=\sin v$, իսկ $v=x^3$: Ըստ նախորդ թեորեմի y բարդ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է:

Օրինակ. Ցանկացած բազմանդամ անընդհատ ֆունկցիա է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Դիտարկենք $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_n$ բազմանդամը:

Քանի որ a_k հաստատունները և x^k ֆունկցիաները անընդհատ են, իսկ բազմանդամը ստացվում է այդպիսի վերջավոր թվով ֆունկցիաների գումարների և արտադրյալների միջոցով ուստի բազմանդամը անընդհատ ֆունկցիա է $x\in R$-ում:

Օրինակ. $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ֆունկցիան, որտեղ $P(x)$-ը և $Q(x)$-ը բազմանդամներ են, անընդհատ է ամենուրեք, բացի x-ի այն արժեքներից, որտեղ $Q(x)=0$:

Այսպես, օրինակ $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-3x+2}$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է ամենուրեք, բացի այն կետերից, որտեղ $x^2-3x+2=0$, այսինքն՝ բացի $x=1$ և $x=2$ կետերից:

Այժմ, օգտվելով անընդհատության գաղափարից և նախորդ շարադրած տեսությունից, հաշվենք մի քանի սահմաններ:

Օրինակ 1. Հաշվել $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ սահմանը:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1:$$

Այստեղ օգտվեցինք $x_0=e$ կետում $y=\ln x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից:

Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\Rightarrow\ln(1+x)\sim x$, երբ $x\to0$:

Օրինակ 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$:

Օգտվեցինք $\ln(1+3x)\sim3x$ և $\sin 2x\sim 2x$, երբ $x\to0$ պայմաններից և անվերջ փոքրերի վերաբերյալ թեորեմներից:

Օրինակ 3. Հաշվել $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$ սահմանը, որտեղ $a\neq1$, $a>0$ դրական թիվ է: Երբ $a=1$ ակնհայտ է, որ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=0$: Նշանակենք $a^x-1=y$: Քանի որ a^x ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}(a^x-1)=a^0-1=1-1=0$: Այսպիսով, $y\to0$, երբ $x\to0$:

$$a^x-1=y\Rightarrow a^x=1+y\Rightarrow x=\log_a(1+y);$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a\left(\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a:$$

Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$:

Մասնավոր դեպքում, երբ $a=e$, ստանում ենք $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$: Այսպիսով՝ $a^x-1\sim x\ln a$ և $e^x-1\sim x$, երբ $x \to 0$:

Օրինակ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$:

Օրինակ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2}-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln 3}{x^2}=\ln 3$, քանի որ $3^{x^2}-1\sim x^2\cdot\ln 3$ և $\sin x\sim x$, երբ $x\to 0$:

Օրինակ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\beta x}\left(e^{(\alpha-\beta)x}-1\right)}{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}x\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{2\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}x}\times$

$\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\beta x}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\alpha-\beta)x}{2\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{2}x}\cdot\dfrac{e^{\beta\cdot 0}}{\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot 0\right)}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$:

Օգտվեցինք $x=0$ կետում e^x և $\cos x$ ֆունկցիաների ընդհատությունից և անվերջ փոքրերը փոխարինեցինք իրենց համարժեք անվերջ փոքրերով:

Օրինակ 7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^6=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^6=e^6$:

Այստեղ օգտվեցինք $u=e$ կետում u^6 ֆունկցիայի անընդհատությունից:

Օրինակ 8.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{4x}{2x-1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-1}}=e^2:$$

Օրինակ 9.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{\mathrm{ctg}^2x}=\lim_{x\to 0}\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{\frac{1}{3\mathrm{tg}^2x}}\right)^3=\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^3=e^3:$$

Այստեղ նշանակեցինք $\alpha=3\mathrm{tg}^2x$ և օգտվեցինք $\alpha\to 0$, երբ $x\to 0$ պայմանից: Իրոք, $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=\lim\limits_{x\to 0}3\mathrm{tg}^2x=3\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}^2x=3\cdot(\mathrm{tg}0)^2=3\cdot 0=0$:

Օրինակ 10. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$:

Նշանակենք $(1+x)^\alpha-1=y$, պարզ է, որ $y\to 0$, երբ $x\to 0$: Այստեղից՝ $(1+x)^\alpha=1+y\Rightarrow\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$: Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha\ln(1+x)}\times$

$\times\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}\cdot\alpha\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\cdot\alpha=\alpha$:

Օրինակ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$:

Օրինակ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$:

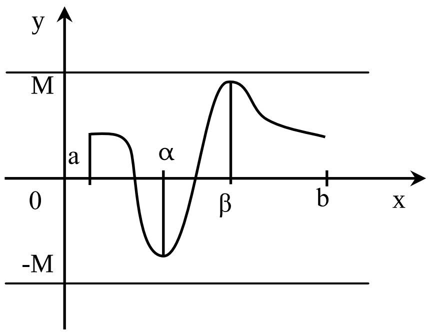
Վերջում նշենք $[a,b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի մի քանի շատ կարևոր հատկությունները:

Թեորեմ (Վայերշտրաս): Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ապա այդ հատվածում այն հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին, այսինքն $\exists\alpha$ և $\beta\in[a,b]$ կետեր այնպես, որ $f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$ $\forall x\in[a,b]$համար: $f(\alpha)$-ն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն, իսկ $f(\beta)$-ն՝ մեծագույն արժեք $[a,b]$-ում:

$m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=f(\alpha);\ M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)=f(\beta)$:

Թեորեմ 2. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում, ապա այն սահմանափակ է, այսինքն՝ $\exists M>0$ այնպես, որ $|f(x)|\le M, \forall x\in[a,b]$:

Այս թեորեմների երկրաչափական մեկնաբանումը տրված է նկարում.



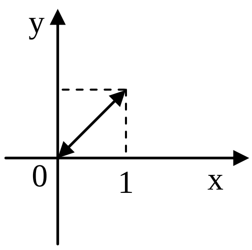
Պետք է նշել, որ (a,b) բաց միջակայքում անընդհատ ֆունկցիան այդ հատկությունները կարող է չունենալ:

Օրինակ. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ֆունկցիան $(0,2)$ միջակայքում անընդհատ է, բայց սահմանափակ չէ՝

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}=\dfrac{1}{x-2}=-\infty$:

Օրինակ. $f(x)=x$ ֆունկցիան $(0,1)$ միջակայքում անընդհատ է, բայց չունի մեծագույն արժեք: Իրոք, պարզ է, որ $f(x)=x<1$, երբ $x\in(0,1)$: Սակայն, ինչպիսին էլ լինի $0<x_0<1$ թիվը, միշտ կա $x_0<x<1$ արժեք, ուստի միշտ կա x կետ, որտեղ $f(x)>x_0$, այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է 1-ին մոտ և նրանից փոքր ցանկացած արժեք:

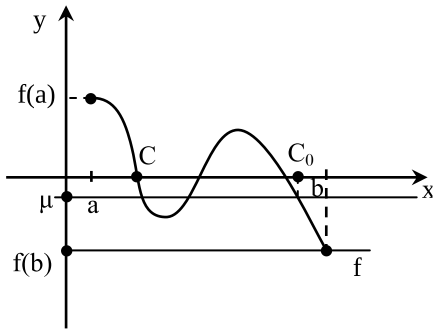
Բայց $(0,1)$ միջակայքում չկա կետ, որտեղ $f(x)=1$ ($x=1$ կետը չի պատկանում $(0,1)$-ին):



Թեորեմ (Կոշի): Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածում և նրա ծայրակետերում ընդունած $f(a)$ և $f(b)$ արժեքները տարբեր նշանի են՝ $f(a)\cdot f(b)<0$, ապա (a,b) միջակայքում գոյություն ունի առնվազն մեկ C կետ այնպես, որ $f(C)=0$:

Հետևանք: $[a,b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է իր m փոքրագույն և M մեծագույն արժեքների միջև ընկած ցանկացած μ արժեք, այսինքն, եթե $m\le\mu\le M$, ապա $\exists C_0\in[a,b]$ այնպես, որ $f(C_0)=\mu$:

Թեորեմի և հետևանքի երկրաչափական մեկնաբանումը տրված է նկարում:



Օրինակ. $f(x)=x^2-2x-3$ ֆունկցիան $[0,4]$ միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է $f(0)=-3$ և $f(4)=5$ տարբեր նշանի արժեքներ, հետևաբար, ըստ Կոշիի թեորեմի $\exists C_0\in(0,4)$, որտեղ $f(C_0)=0$: Իրոք, $f(3)=3^2-2\cdot3-3=0$ և $3\in(0,4)$:

Օրինակներ

Հաշվել հետևյալ սահմանները:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x^2)}{1-\cos 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lg(1+\sin x)}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\lg(1+\sin^2 x)}{x^2-\pi^2}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+4^x)}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x^2+5x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 4x}{3x^3-x}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{2x^2-2x}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^{x^2-x}-1}{x^2+x-2}$

12. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5^x-125}{x^2-3x}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{\sin 4x}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^{\cos 2x}-6}{1-\cos^2 x}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{-2x}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$

18. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-2}\right)^{x}$

19. $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{x}$

20. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

21. $\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$

22. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+3x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

23. $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

24. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+5x}{2+5x}\right)^{x}$

25. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+5x}-1}{\sin x}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{8+x^2}-2\sqrt{2}}{x^2}$

28. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x^2+x}$