ԵՐԵՎԱՆԻ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՔՈԼԵՋ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԱՆՈՐՈՇ ԵՎ ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Կազմեց Ռ.Ղազարյան

ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ - 2011

Ռ.Ղազարյան
ԱՆՈՐՈՇ ԵՎ ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Անորոշ ինտեգրալ

F(x) ֆունկցիան կոչվում է (a,b) միջակայքում որոշված f(x) ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիա, կամ նախնական, եթե $F'(x)=f(x)$ այդ միջակայքի ցանկացած x կետում:

Օրինակ. $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի համար նախնական ֆունկցիաներ են $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+5$, $F_3(x)=\frac{x^3}{3}+7$ և այլն:

Ընդհանրապես, եթե F(x)-ը f(x)-ի նախնական ֆունկցիա է, ապա բոլոր նախնականներն ունեն F(x)+C տեսքը:

f(x) ֆունկցիայի բոլոր նախնականների համախումբը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում $\int f(x)dx$ պայմանանշանով: Այսպիսով՝ $\int f(x)dx=F(x)+C$, որտեղ F(x)-ը տրված f(x) ֆունկցիայի որևէ նախնական է:

f(x)-ը կոչվում է ենթաինտեգրալային ֆունկցիա, f(x)dx-ը՝ ենթաինտեգրալային արտահայտություն, x-ը՝ ինտեգրման փոփոխական, $\int$ -ը՝ անորոշ ինտեգրալի նշան, C-ն՝ ինտեգրման հաստատուն:

$y=F(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոչվում է ինտեգրալային կոր, իսկ F(x) ֆունկցիայի գտնելը ըստ նրա ածանցյալի՝ ինտեգրում:

Անորոշ ինտեգրալն ունի հետևյալ հիմնական հատկությունները.

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

2) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

3) $\int f'(x)dx=f(x)+C$

4) $\int df(x)=f(x)+C$

5) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

6) $\int (f(x)\pm\varphi(x))dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx$

7) Եթե $\int f(x)dx=F(x)+C$ և $u=\varphi(x)$, ապա $\int f(u)du=F(u)+C$

Եթե f(x) ֆունկցիան ունի ածանցյալ, ապա նրա դիֆերենցիալը հաշվվում է հետևյալ ձևով՝ $df(x)=f'(x)dx$:

Այն դեպքում, երբ f(x)-ի նախնականներից որևէ մեկը դժվար է որոշել, կարելի է կատարել $x=\varphi(u)$ տեղադրությունը և ստանալ ավելի հեշտ ինտեգրվող ֆունկցիա: Փոփոխականի փոխարինելը անորոշ ինտեգրալում կատարվում է հետևյալ կերպ՝

$$x=\varphi(u)\Rightarrow dx=\varphi'(u)du \text{ և } \int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du:$$

Անորոշ ինտեգրալների հիմնական աղյուսակն է.

1) $\int 0\cdot dx = C$, C-ն հաստատուն է:

2) $\int dx = x + C$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5ա) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6ա) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

7ա) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\mathrm{tg} ax + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

8ա) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\mathrm{ctg} ax + C$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$

12) $\int e^x dx = e^x + C$

12ա) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

14) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$

15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Ինտեգրման մեթոդներից մեկը անմիջական ինտեգրումն է, որի ժամանակ ինտեգրալի հաշվումը բերվում է աղյուսակային ինտեգրալների հաշվման:

Օրինակ 1. $\int\left(2x + \frac{1}{x}\right)dx = \int 2x dx + \int \frac{1}{x}dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C = x^2 + \ln|x| + C$

Օրինակ 2.

$$\int\frac{3x^3+2x^2+30dx}{x}=\int\left(\frac{3x^3}{x}+\frac{2x^2}{x}+\frac{30}{x}\right)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx+\int\frac{30}{x}dx=3\int x^2dx+2\int xdx+$$

$$+30\int\frac{dx}{x}=3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+30\ln|x|+C=x^3+x^2+30\ln|x|+C$$

Օրինակ 3.

$$\int 5\sqrt{x}dx=5\int x^{\frac{1}{2}}dx=5\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C$$

Օրինակ 4.

$$\int\frac{10}{\sqrt[5]{x^3}}dx=10\int\frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}dx=10\int x^{-\frac{3}{5}}dx=10\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+C=10\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+C=10\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt[5]{x^2}+C=25\sqrt[5]{x^2}+C$$

Օրինակ 5.

$$\int\frac{(1+t)^2}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{1+2t+t^2}{\sqrt{t}}dt=\int\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+2\frac{t}{\sqrt{t}}+\frac{t^2}{\sqrt{t}}\right)dt=\int\left(t^{-\frac{1}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt+2\int t^{\frac{1}{2}}dt+$$

$$+\int t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+2\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=2\sqrt{t}+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+C$$

Օրինակ 6. $\int 12\cos 3xdx=4\int\cos 3xd(3x)=4\sin 3x+C$

Օրինակ 7. $\int 3\sin 4xdx=\frac{3}{4}\int\sin 4xd(4x)=-\frac{3}{4}\cos 4x+C$

Օրինակ 8. $\int\frac{7}{2\cos^2 3x}dx=\frac{7}{2\cdot 3}\int\frac{d(3x)}{\cos^2 3x}=\frac{7}{6}\mathrm{tg}3x+C$

Օրինակ 9. $\int\frac{3}{2e^{5x}}dx=\frac{3}{2}\int e^{-5x}dx=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\int e^{-5x}d(-5x)=-\frac{3}{10}e^{-5x}+C=-\frac{3}{10e^{5x}}+C$

Օրինակ 10. $\int\frac{3}{4x}dx=\int\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{x}dx=\frac{3}{4}\ln|x|+C$

Օրինակ 11. $\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}+C=3^x\log_3 e+C$

Օրինակ 12. $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot\left(3^2\right)^x dx=\int\left(2\cdot 3^2\right)^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C$

Օրինակ 13. $\int\frac{4}{9+x^2}dx=4\int\frac{dx}{3^2+x^2}=4\cdot\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C$

Օրինակ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$

Օրինակ 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

Օրինակ 16. $\int \frac{dx}{x^2-25} = \int \frac{dx}{x^2-5^2} = \frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$

Օրինակ 17. $\int \frac{5}{16+9x^2}dx = \frac{5}{3}\int \frac{d(3x)}{4^2+(3x)^2} = \frac{5}{3\cdot 4}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + C = \frac{5}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + C$

Օրինակ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-49x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(7x)^2}} = \frac{1}{7}\int \frac{d(7x)}{\sqrt{2^2-(7x)^2}} = \frac{1}{7}\arcsin\frac{7x}{2} + C$

Տեղադրման մեթոդը կիրառվում է այն դեպքում, երբ ինտեգրալն ունի $\int f^n(x)\cdot f'(x)dx$ կամ $\int \frac{f'(x)dx}{f^n(x)}$ տեսքը:

Նման դեպքերում կատարվում է $u = f(x)$ նշանակումը:

Օրինակ 1. Հաշվել ինտեգրալը՝

$$\int (3x-2)^5 dx :$$

Նշանակենք $u = 3x-2$: Գտնենք u-ի դիֆերենցիալը՝ $du = (3x-2)'dx$ կամ $du = 3dx$: Այստեղից գտնում ենք $dx = \frac{du}{3}$ և տեղադրում ինտեգրալում.

$$\int (3x-2)^5 dx = \int u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$$

Օրինակ 2. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int \frac{dx}{3x+4}$:

Եթե նշանակենք $u = 3x+4$, ապա $du = (3x+4)'dx$, $du = 3dx$, որտեղից՝ $dx = \frac{du}{3}$:

Այսպիսով՝ $\int \frac{du}{3x+4} = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+4| + C$:

Օրինակ 3. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int \frac{x}{3+5x^2}dx$:

Քանի որ $xdx = \frac{1}{2}dx^2 = \frac{1}{2\cdot 5}d(5x^2) = \frac{1}{10}d(5x^2+3)$, կարելի է նշանակել $u = 3+5x^2$ և ինտեգրալը կներկայացվի $\int \frac{xdx}{3+5x^2} = \frac{1}{10}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{10}\ln|u| + C = \frac{1}{10}\ln\left|3+5x^2\right| + C$:

Օրինակ 4. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}dx^2 = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$

(այստեղ նշ. $u=x^2$):

Օրինակ 5. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int x^2\cos(5x^3+4)dx$:

Ենթադրենք $u=5x^3+4$, այդ դեպքում $du=(5x^3+4)'dx=15x^2dx$:

Այստեղից $x^2dx=\frac{du}{15}$ և $\int x^2\cos(5x^3+4)dx=\int\cos u\frac{du}{15}=\frac{1}{15}\cdot\sin u+C=\frac{1}{15}\sin(5x^3+4)+C$:

Օրինակ 6. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int x^3\sqrt[5]{10x^4-7}dx$:

Նշանակենք $u=10x^4-7$ և հաշվենք դիֆերենցիալը՝

$du=(10x^4-7)'dx$, $du=40x^3dx$, այստեղից $x^3dx=\frac{du}{40}$ և $\int x^3\sqrt[5]{10x^4-7}dx=\int\sqrt[5]{u}\frac{du}{40}=\frac{1}{40}\int u^{\frac{1}{5}}du=$

$$=\frac{1}{40}\frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}+C=\frac{1}{40}\cdot\frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=\frac{1}{48}u^{\frac{6}{5}}+C=\frac{1}{48}(10x^4-7)^{\frac{6}{5}}+C:$$

Օրինակ 7. $\int \mathrm{tg}x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{d(-\cos x)}{\cos x}=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C=\ln\frac{1}{|\cos x|}+C$:

Օրինակ 8. $\int 5\sin^4 x\cos x dx=5\int\sin^4 x d\sin x=5\int u^4du$ (Նշանակենք $u=\sin x$, $du=\cos x dx$),

$5\int u^4du=5\frac{u^5}{5}+C=u^5+C=\sin^5 x+C$:

Օրինակ 9. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int\sin 2xe^{\cos 2x}dx$:

Նշանակենք $u=\cos 2x$, $du=(\cos 2x)'dx=-\sin 2x\cdot(2x)'dx=-2\sin 2xdx$

Այստեղից՝ $\sin 2xdx=-\frac{du}{2}$:

Տեղադրենք ինտեգրալում՝ $\int\sin 2xe^{\cos 2x}dx=-\frac{1}{2}\int e^u du=-\frac{1}{2}e^u+C=-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$:

Դիտարկենք $\int\sin^m x\cos^n xdx$ տեսքի ինտեգրալները, որտեղ m և n-ը բնական թվեր են: Հնարավոր է երկու դեպք.

ա) m և n թվերից գոնե մեկը կենտ է,

բ) m և n թվերը զույգ են:

Նման տեսքի ինտեգրալները հաշվելիս կօգտվենք եռանկյունաչափությունից հայտնի հետևյալ բանաձևերից.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}:$$

Օրինակ 1. Հաշվել $\int \sin^2 5xdx$ ինտեգրալը:

Քանի որ $\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1-\cos 10x)$, ուստի՝

$$\int \sin^2 5xdx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 10x)dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx - \int \cos 10xdx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 10x}{10}\right) + C:$$

Օրինակ 2.

$$\int \mathrm{tg}^2 3xdx = \int \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}dx = \int \frac{1-\cos^2 3x}{\cos^2 3x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 3x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x}\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 3x}dx - \int dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos^2 3x}d(3x) - x + C = \frac{1}{3}\mathrm{tg}3x - x + C:$$

Օրինակ 3. $\int \sin^2 x\cos^3 xdx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos xdx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)d\sin x = \int u^2(1-u^2)du =$

$$= \int (u^2 - u^4)du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C:$$

Հաշվելու ընթացքում նշանակեցինք $u = \sin x$:

Օրինակ 4. $\int \sin^5 xdx = \int \sin^4 x\sin xdx = \int (\sin^2 x)^2 d(-\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^2 d\cos x = -\int (1-t^2)^2 dt =$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)dt = -\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C:$$

Հաշվելու ընթացքում նշանակեցինք $t = \cos x$:

Օրինակ 5. Հաշվել ինտեգրալը՝ $J = \int \cos^2 x\cdot\sin^4 xdx$:

Քանի որ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ և $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$,

տեղադրենք ինտեգրալում և հաշվենք

$$J = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 2xdx - \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx + \int (1-\sin^2 2x)\cos 2xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)\right) =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C:$$

Օրինակ 6. Հաշվել $J=\int tg^4 x dx$ ինտեգրալը:

$$J=\int tg^2 x\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int tg^2 x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int tg^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int tg^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int tg^2 x dx=\int tg^2 x d tgx-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x+C$$

Այս ինտեգրալը կարելի է հաշվել նաև $u=tgx$ տեղադրությամբ: Իրոք,

$$du=(tgx)'dx=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(1+tg^2 x)dx=(1+u^2)dx\text{, որտեղից } dx=\frac{du}{1+u^2}\text{, և}$$

$$J=\int u^4\frac{du}{1+u^2}=\int\left(\frac{u^4-1}{u^4+1}+\frac{1}{1+u^2}\right)du=\int(u^2-1)du+\int\frac{1}{1+u^2}du=\frac{u^3}{3}-u+arctgu+C=$$

$$=\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x+C,$$

քանի որ $arctg(tgx)=x$:

$\int\sin mx\cos nx dx$, $\int\sin mx\sin nx dx$ և $\int\cos mx\cos nx dx$ տիպի ինտեգրալները հաշվելիս օգտվում ենք հետևյալ բանաձևերից.

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)$$

Օրինակ 7.

$$\int 3\sin 5x\cos 3x dx=\frac{3}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx=\frac{3}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}-\frac{\cos 2x}{2}\right)+C=-\frac{3}{16}\cos 8x-\frac{3}{4}\cos 2x+C$$

Օրինակ 8.

$$\int\sin 2t\cos 7t dt=\frac{1}{2}\int(\sin(2t+7t)+\sin(2t-7t))dt=\frac{1}{2}\int(\sin 9t-\sin 5t)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5t}{5}-\frac{\cos 9t}{9}\right)+C$$

Օրինակ 9. $\int 10\cos 2x\cos 3x dx=5\int(\cos 5x+\cos x)dx=5\left(\frac{\sin 5x}{5}+\sin x\right)+C=\sin 5x+5\sin x+C$

Օրինակ 10.

$$\int 26\sin 8x\sin 5x dx=13\int(\cos(8x-5x)-\cos(8x+5x))dx=13\int(\cos 3x-\cos 13x)dx=\frac{13}{3}\sin 3x-\sin 13x+C$$

Օրինակ 11. Հաշվել $J=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ ինտեգրալը:

Նշանակենք $x=a\sin t$, այստեղից $dx=a\cos t dt$ և

$$J=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}(a\cos t)dt=\int\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}(a\cos t)dt=\int\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t dt=$$

$$=\int(a\cos t)(a\cos t)dt=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{2\sin t\cos t}{2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C:$$

Քանի որ $\sin t=\frac{x}{a}$ և $t=\arcsin\frac{x}{a}$, կստանանք

$$J=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C:$$

Օրինակ 12. Հաշվել $J=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ ինտեգրալը:

Նշանակենք $x=a\,tgt$, $dx=(a\,tgt)'dt=\frac{a}{\cos^2 t}dt=a(1+tg^2 t)dt$

$$J=\int\frac{a(1+tg^2t)}{(a^2+a^2tg^2t)^2}dt=\int\frac{a(1+tg^2t)dt}{(a^2\cdot(1+tg^2t))^2}=\int\frac{a}{a^4}\cdot\frac{1+tg^2t}{(1+tg^2t)^2}dt=\frac{1}{a^3}\int\frac{1}{1+tg^2t}dt=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{1}{2a^3}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C:$$

Բայց $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, իսկ $\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\frac{2tgt}{1+tg^2t}=\frac{2\cdot\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{2ax}{a^2+x^2}:$

Այսպիսով՝ $J=\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+C:$

Օրինակ 13. Հաշվել $J=\int\frac{8}{5+4x^2}dx$ ինտեգրալը:

$$J=\int\frac{8}{5+4x^2}dx=\int\frac{8}{4\left(\frac{5}{4}+x^2\right)}dx=2\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2+x^2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt5/2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5/2}+C=\frac{4}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt5}+C=$$

$$=\frac{4\sqrt5}{5}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt5x}{5}+C:$$

Ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը

Ռացիոնալ կոտորակ է կոչվում $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ տեսքի կոտորակը, որտեղ $P_m(x)$-ը և $Q_n(x)$-ը բազմանդամներ են: Եթե $P_m(x)$ բազմանդամի m աստիճանը փոքր է $Q_n(x)$ բազմանդամի n աստիճանից, կոտորակը կոչվում է կանոնավոր, իսկ եթե $m\ge n$, կոտորակը կոչվում է անկանոն: Անկանոն կոտորակը կարելի է ներկայացնել բազմանդամի և կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով, հետևաբար, ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը բերվում է կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրմանը:

Յանկացած կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ ներկայացվում է պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով: Պարզագույն կոտորակներն են.

I. $\dfrac{A}{x-a}$

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, որտեղ $p^2-4q<0$

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$

Յաշվենք առաջին երեք տիպի ինտեգրալները.

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int (x-a)^{-m}d(x-a) = \frac{A}{1-m}\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

Այժմ դիտարկենք III տիպի կոտորակների ընդհանուր դեպքի ինտեգրումը`

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx, \quad \frac{p^2}{4}-q<0$$

Նախ հաշվում ենք հայտարարի ածանցյալը. $\left(x^2+px+q\right)' = 2x+p$:

Յամարիչը ձևափոխենք և ներկայացնենք $Ax+B=(2x+p)\cdot\dfrac{A}{2}+B-\dfrac{Ap}{2}$ տեսքով:

Այդ դեպքում.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\cdot\frac{A}{2}}{x^2+px+q}dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Օրինակ 1.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+8} + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C$$

Օրինակ 2. Հաշվել $\int \frac{x+7}{(x-2)(x+1)}dx$ ինտեգրալը:

Նախ կոտորակը վերլուծենք պարզագույն կոտորակների գումարի.

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Հայտարարից ազատվելով՝ կստանանք՝ $x+7 = A(x+1) + B(x-2)$: Խմբավորենք ըստ x-ի աստիճանների՝ $x+7 = x(A+B) + (A-2B)$: Հավասարեցնենք x-ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները՝

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=7 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը՝ ստանում ենք $A=3, B=-2$, հետևաբար,

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}:$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{x+7}{(x-2)(x+1)}dx = \int\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}\right)dx = 3\int\frac{dx}{x-2} - 2\int\frac{dx}{x+1} = 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}\right| + C:$$

Օրինակ 3. Հաշվել $\int \frac{2x^2-9x-35}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$ ինտեգրալը:

$$\frac{2x^2-9x-35}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}:$$

Գտնենք A, B, C անորոշ գործակիցները.

$$2x^2-9x-35 = A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2):$$

Այս անգամ կիրառենք A, B, C-ն գտնելու մեկ այլ ձև: Քանի որ ստացված հավասարությունը նույնություն է, x-ին տանք այնքան արժեքներ, որքան անհայտ գործակիցներ ունենք: Ամենահարմար արժեքները կոտորակի հայտարարի զերոներն են:

$x=-1 \qquad 2\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) - 35 = A(-1-2)(-1+3)$

$x=2 \qquad 2\cdot(2)^2 - 9\cdot 2 - 35 = B(2+1)(2+3)$

$x=-3 \qquad 2\cdot(-3)^2 - 9\cdot(-3) - 35 = C(-3+1)(-3-2)$

Այստեղից $\begin{cases} -6A=-24 \\ 15B=-45 \\ 10C=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \\ C=1 \end{cases}$

Հետևաբար

$$\int \frac{2x^2-9x-35}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx = \int\left(\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)dx = 4\int\frac{dx}{x+1}-3\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+3} = 4\ln|x+1|-$$

$$-3\ln|x-2|+\ln|x+3|+C = \ln\left|\frac{(x+1)^4(x+3)}{(x-2)^3}\right|+C:$$

Օրինակ 4. Հաշվել $\int \frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}dx$ ինտեգրալը:

Քանի որ կոտորակը անկանոն է, նախ անջատում ենք ամբողջ մասը՝

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-4x-4 & x^2+x-2 \\ \underline{-\;x^3+x^2-2x} & \overline{x-3} \\ -3x^2-2x-4 & \\ \underline{-\;-3x^2-3x+6} & \\ x-10 & \end{array}$$

Հետևաբար կոտորակը կներկայացվի հետևյալ տեսքով

$$\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2} = x-3+\frac{x-10}{x^2+x-2}:$$

Վերջին կոտորակը պարզագույն կոտորակների գումարով ներկայացնելու համար նրա հայտարարը վերածում ենք արտադրիչների.

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1):$$

Այնուհետև՝ $\frac{x-10}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \Rightarrow\; x-10=A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow$

$$\begin{array}{lll} x=1 & 1-10=A(1+2) & A=-3 \\ x=-2 & -2-10=B(-2-1) & B=4 \end{array}$$

Հետևաբար՝

$$\int\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}dx=\int\left(x-3+\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+2|-3\ln|x-1|+C:$$

Օրինակ 5. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}dx:$

Կոտորակը ներկայացնենք պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարով՝

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

այստեղից՝ $5x^2-2x-19=A(x-1)^2+B(x-1)(x+3)+C(x+3):$

Երբ

$$\begin{array}{lll} x=1 & 5\cdot 1^2-2\cdot 1-19=C\cdot(1+3) & C=-4 \\ x=-3 & 5\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)-19=A\cdot(-3-1)^2 & A=2 \\ x=0 & -19=A-3B+3C & B=3 \end{array}$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx=2\ln|x+3|+3\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}+C=$$

$$=\ln\left|(x+3)^2(x-1)^3\right|+\frac{4}{x-1}+C$$

Օրինակ 6. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int \frac{5x^2-x+14}{(x+1)(x^2+9)}dx$:

$$\frac{5x^2-x+14}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+9}\Rightarrow\ 5x^2-x+14=A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1):$$

Հավասարեցնենք աջ ու ձախ մասերում x-ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները՝

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\ \begin{cases} A+B=5 \\ B+C=-1 \\ 9A+C=14 \end{cases}$$

Համակարգի լուծումն է՝ $A=2, B=3, C=-4$: Այսպիսով՝

$$\int\frac{5x^2-x+14}{(x+1)(x^2+9)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3x-4}{x^2-9}\right)dx=2\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{x}{x^2+9}dx-4\int\frac{dx}{x^2+3^2}=2\ln|x+1|+\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}-$$

$$-\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C=2\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x^2+9|-\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$$

Օրինակ 7. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int\frac{x^2-8x-2}{x^3-1}dx$:

Հայտարարը վերածենք արտադրիչների և կոտորակը ներկայացնենք պարզագույն կոտորակների գումարով. $\frac{x^2-8x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$: Այստեղից՝

$x^2-8x-2=A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$:

Խմբավորենք ըստ x-ի աստիճանների և հավասարեցնենք համապատասխան գործակիցները.

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\ \begin{cases} A+B=1 & A=-3 \\ A-B+C=-8 & B=4 \\ A-C=-2 & C=-1 \end{cases}$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{x^2-8x-2}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{4x-1}{x^2+x+1}\right)dx=-3\ln|x-1|+\int\frac{2(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx=-3\ln|x-1|+2\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-$$

$$-3\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-3\ln|x-1|+2\ln\left|x^2+x+1\right|-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C:$$

Մասերով ինտեգրում

Մասերով ինտեգրում է կոչվում ինտեգրալի հաշվումը $\int udv=uv-\int vdu$ բանաձևով, որտեղ u=u(x) և v=v(x)-ը անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

Հետևյալ տիպի ինտեգրալներում՝ $\int P(x)e^{mx}dx$, $\int P(x)\sin mxdx$ և $\int P(x)\cos mxdx$, որտեղ P(x)-ը բազմանդամ է, որպես u(x) ընդունում են P(x)-ը, իսկ որպես dv՝ համապատասխանաբար $e^{mx}dx, \sin mxdx, \cos mxdx$ -ը: Իսկ եթե ինտեգրալներն ունեն $\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg}xdx$ և այլն տեսքը, որպես u ընդունում ենք lnx, arcsinx,... և այլն, իսկ որպես dv՝ P(x)dx արտահայտությունը:

u և dv նշանակումների ոչ ճիշտ ընտրության դեպքում ինտեգրալի հաշվումը կարող է բերվել ավելի բարդ ինտեգրալի հաշվման:

Օրինակ 1. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int \ln xdx$: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \\ dv=dx \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx \\ v=\int dx=x \end{array}$$

$$\int \ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C:$$

Օրինակ 2. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int(2x+1)\ln xdx$: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \\ dv=(2x+1)dx \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\int(2x+1)dx=x^2+x \end{array}$$

$$\int(2x+1)\ln xdx=\left(x^2+x\right)\ln x-\int\left(x^2+x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\left(x^2+x\right)\ln x-\int(x+1)dx=\left(x^2+x\right)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C:$$

Օրինակ 3. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int x\sin xdx$: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}$$

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C:$$

Օրինակ 4. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int (3x+4)\cos 2x dx$ ։ Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u = 3x+4 \\ dv = \cos 2x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = (3x+4)' dx = 3dx \\ v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}$$

$$\int (3x+4)\cos 2x dx = (3x+4)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 3dx = \frac{3x+4}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C:$$

Օրինակ 5. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int 5te^{3t}dt$ ։ Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u = 5t \\ dv = e^{3t}dt \end{array}\right| \begin{array}{l} du = (5t)' dt = 5dt \\ v = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array}$$

$$\int 5te^{3t}dt = (5t)\cdot\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right) - \int \frac{1}{3}e^{3t}5dt = \frac{5}{3}t\cdot e^{3t} - \frac{5}{3}\int e^{3t}dt = \frac{5}{3}t\cdot e^{3t} - \frac{5}{9}e^{3t} + C:$$

Օրինակ 6.

$$\int x^2e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2 = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2xe^x + \int e^x d2x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Օրինակ 7. Հաշվել ինտեգրալը՝ $J = \int (x^2+2x)\sin x dx$ ։ Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2+2x \\ dv = \sin x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = (2x+2)dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}$$

$$J = (x^2+2x)\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)(2x+2)dx = -(x^2+2x)\cos x + \int (2x+2)\cos x dx:$$

Վերջին ինտեգրալը նույնպես հաշվվում է մասերով: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 2x+2 \\ dv_1 = \cos x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du_1 = 2dx \\ v_1 = \int \cos x dx = \sin x \end{array}$$

$$J = -(x^2+2x)\cos x + (2x+2)\sin x - \int 2\sin x dx = -(x^2+2x)\cos x + (2x+2)\sin x + 2\cos x + C:$$

Օրինակ 8. Հաշվել ինտեգրալը՝ $J = \int x\cdot \mathrm{arctg} x dx$ ։ Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u = \mathrm{arctg} x \\ dv = x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = (\mathrm{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$J=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\int\frac{\frac{x^2}{2}}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$
$$=x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C:$$

Օրինակ 9. Հաշվել ինտեգրալը՝ $J=\int\sqrt{x}\cdot\ln x dx$: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \\ dv=\sqrt{x}dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

$$J=\int\sqrt{x}\cdot\ln x dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C=$$
$$=\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+C:$$

Օրինակ 10. Հաշվել ինտեգրալը՝ $J=\int e^{ax}\cdot\cos bx dx$: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u=e^{ax} \\ dv=\cos bx dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du=\left(e^{ax}\right)'dx=ae^{ax}dx \\ v=\int\cos bx dx=\frac{1}{b}\sin bx \end{array}$$

$$J=e^{ax}\cdot\left(\frac{1}{b}\sin bx\right)-\int\left(\frac{1}{b}\sin bx\right)\left(ae^{ax}dx\right)=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}J_1:$$

Վերջին ինտեգրալը նորից մասերով ինտեգրենք: Նշանակենք

$$\left.\begin{array}{l} u_1=e^{ax} \\ dv_1=\sin bx dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du_1=ae^{ax}dx \\ v_1=\int\sin bx dx=-\frac{1}{b}\cos bx \end{array}$$

$$J_1=e^{ax}\cdot\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)-\int\left(-\frac{1}{b}\right)\cos bx ae^{ax}dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}J$$

Տեղադրելով J_1-ի արժեքը նախորդ հավասարության մեջ, ստանում ենք J-ի նկատմամբ հավասարում:

$$J=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}J\right)$$

$$J=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}J$$

$$\left(a^2+b^2\right)J=e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$$

$$J=\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C$$

Օրինակ 11. $\int e^{3x}\cos 5x dx=e^{3x}\frac{(5\sin 5x+3\cos 5x)}{3^2+5^2}+C=\frac{e^{3x}(5\sin 5x+3\cos 5x)}{34}+C$

Օրինակ 12. Հաշվել ինտեգրալը` $J_1 = \int e^{ax} \cdot \sin bx dx$:

$$J_1 = \int \sin bx d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{1}{a}e^{ax} d\sin bx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx -$$

$$-\frac{b}{a}\frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)a}\left(a^2\sin bx + b^2\sin bx - b^2\sin bx - ab\cos bx\right) + C =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

Դիտարկենք հետևյալ տիպի ինտեգրալները $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$, որտեղ a և b-ն հաստատուններ են: Այս տիպի ինտեգրալների հաշվումը կարելի է բերել ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրման, եթե կատարենք հետևյալ նշանակումը` $t = tg\frac{x}{2}$:

Իրոք, $\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} :$$

Այսպիսով` $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $tg\frac{x}{2} = t$ նշանակումից $\frac{x}{2} = arctgt$, $x = 2arctgt$ և $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$:

Տեղադրելով ստացված արժեքները ինտեգրալում` այն բերվում է ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալի `

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{a\frac{(1-t^2)}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{a(1-t^2) + 2bt} = -2\int \frac{dt}{at^2 - 2bt - a} :$$

Օրինակ 1. Հաշվել ինտեգրալը` $\int \frac{dx}{\sin x}$:

Նշանակենք $tg\frac{x}{2} = t$: Քանի որ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ և $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, ստանում ենք

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C:$$

Օրինակ 2. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int\frac{dx}{1+\cos x}$:

Եթե $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ապա $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ և $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, ուստի

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)+\left(1-t^2\right)}=\int\frac{2dt}{2}=\int dt=t+C=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C:$$

Օրինակ 3. Հաշվել ինտեգրալը՝ $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$:

Եթե $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ապա $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ և $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, այսպիսով՝

$$\int\frac{dx}{5+4\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{5\left(1+t^2\right)+4\left(1-t^2\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+9}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3}+C:$$

Օրինակ 4. Հաշվել ինտեգրալը՝ $J=\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$:

Օգտվենք նույն՝ $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ նշանակումից:

$$J=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{4\left(1-t^2\right)+6t}=\int\frac{2dt}{4-4t^2+6t}=-\int\frac{dt}{2t^2-3t-2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t-\frac{3}{4}\right)}{\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{t-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-2}{t+\frac{1}{2}}\right|+C=-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C:$$

Որոշյալ ինտեգրալ

Ենթադրենք f(x) ֆունկցիան որոշված է [a,b] հատվածում, իսկ F(x)-ը նրա որևէ նախնական ֆունկցիա է: Ըստ սահմանումի F(x) ցանկացած նախնականի F(b)-F(a) աճը x=a-ից մինչև x=b փոփոխվելու դեպքում կոչվում է f(x) ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ a-ից b և նշանակվում է $\int_a^b f(x)dx$: a և b թվերը կոչվում են ինտեգրման ստորին և վերին սահմաններ,x-ը՝ ինտեգրման փոփոխական, իսկ f(x)-ը՝ ենթաինտեգրալային ֆունկցիա: Այսպիսով, ըստ սահմանման.

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b)-F(a):$$

Այս հավասարությունը կոչվում է Նյուտոնի-Լայբնիցի բանաձև:

Նշենք որոշյալ ինտեգրալի մի քանի հատկությունները.

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ եթե $a < c < b$,
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, k-ն հաստատուն է:
6. Եթե $m \le f(x) \le M \quad x \in [a,b]$ հատվածում, ապա $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
7. Միջին արժեքի մասին թեորեմը: Եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a,b] հատվածում, ապա այդ հատվածում գոյություն ունի առնվազն մեկ այնպիսի c-կետ, որ

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a):$$

$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$ արժեքը կոչվում է ֆունկցիայի միջին արժեք [a,b] հատվածում:

8. Մասերով ինտեգրում: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, այստեղ u(x) և v(x) ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են [a,b] հատվածում:
9. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում.

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, որտեղ $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան և նրա $\varphi'(t)$ ածանցյալը անընդհատ են $t \in [\alpha;\beta]$ հատվածում, $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ և $f(\varphi(t))$-ֆունկցիան անընդհատ է $[\alpha,\beta]$-ում:

10. Եթե f(x)-ը կենտ ֆունկցիա է, այսինքն $f(-x)=-f(x)$, ապա

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Եթե f(x)-ը զույգ ֆունկցիա է, այսինքն $f(-x)=f(x)$, ապա

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Հաշվել ինտեգրալները

Օրինակ 1. $\int_1^4 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21$

Օրինակ 2. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^9 = 2\sqrt{x}\Big|_1^9 = 2\sqrt{9}-2\sqrt{1} = 2\cdot 3-2 = 4$

Օրինակ 3.

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4\left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^4 + \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^4 = \left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_1^4 + \left.2x^{\frac{1}{2}}\right|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)+$$

$$+2\left(4^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}(8-1)+2(2-1) = \frac{14}{3}+2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Օրինակ 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\cos 2xdx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx = 3\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin 2(0)\right) = \frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

Օրինակ 5. $\int_0^1 4e^{2x}dx = 4\int_0^1 e^{2x}dx = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_0^1 = 2\left(e^{2\cdot 1}-e^{2\cdot 0}\right) = 2\left(e^2-1\right)$

Օրինակ 6. $\int_2^4 \frac{3}{5x}dx = \frac{3}{5}\int_2^4\frac{dx}{x} = \frac{3}{5}\ln|x|\Big|_2^4 = \frac{3}{5}(\ln 4-\ln 2) = \frac{3}{5}\ln\frac{4}{2} = \frac{3}{5}\ln 2$

Օրինակ 7.

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}dx = \int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1\frac{xdx}{x^2+1}+2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+2\mathrm{arctg}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1+2\mathrm{arctg}1-$$

$$-2\mathrm{arctg}0 = \frac{1}{2}\ln\left(1^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(0^2+1\right)+2\cdot\frac{\pi}{4}-2\cdot 0 = \frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}$$

Օրինակ 8. $\int_0^{\pi} x\sin xdx$:

Հաշվենք՝ մասերով ինտեգրելով: Նշանակենք

$$\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx = x \cdot (-\cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = -(\pi \cos \pi - 0 \cdot \cos 0) + \sin x\Big|_0^\pi = -\pi \cdot (-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi$$

Օրինակ 9.

$$\int_0^2 2xe^x dx = 2\int_0^2 xde^x = 2\left(xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx \right) = 2\left(2 \cdot e^2 - 0 \cdot e^0 - e^x\Big|_0^2\right) = 4e^2 - 2\left(e^2 - e^0\right) = 4e^2 - 2e^2 + 2 = 2e^2 + 2$$

Օրինակ 10. $\int_1^e x \ln x dx$: Նշանակենք.

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

Օրինակ 11. Հաշվել $J = \int_0^1 e^{3x} \cdot \sin 2x dx$: Նշանակենք.

$$\begin{array}{l|l} u = e^{3x} & du = \left(e^{3x}\right)' dx = 3e^{3x} dx \\ dv = \sin 2x dx & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

$$J = e^{3x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \cdot 3e^{3x} dx = -\frac{1}{2} e^3 \cos 2 + \frac{1}{2} e^{3 \cdot 0} \cos 0 + \frac{3}{2} \int_0^1 e^{3x} \cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^3 \cos 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot J_1$$

J_1-ը նույնպես ինտեգրենք մասերով: Նշանակենք

$$\begin{array}{l|l} u_1 = e^{3x} & du_1 = 3e^{3x} dx \\ dv_1 = \cos 2x dx & v_1 = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} e^{3x} \cdot \sin 2x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2} e^{3x} \sin 2x dx = \frac{1}{2} e^3 \sin 2 - \frac{1}{2} e^{3 \cdot 0} \sin 2 \cdot 0 - \frac{3}{2} \int_0^1 e^{3x} \sin 2x dx = \frac{1}{2} e^3 \sin 2 - \frac{3}{2} \cdot J$$

$$J = -\frac{1}{2} e^3 \cos 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} e^3 \sin 2 - \frac{3}{2} J \right)$$

$$J + \frac{9}{4} J = \frac{3e^3 \sin 2 - 2e^3 \cos 2 + 2}{4}$$

$$J=\frac{e^3(3\sin 2-2\cos 2)+2}{13}$$

12. $\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx$

Ընդունենք $t=2x^2+1$, այդ դեպքում $dt=(2x^2+1)'dx=4xdx$, որտեղից $xdx=\frac{dt}{4}$:

Որոշենք ինտեգրման նոր սահմանները.

$$\text{երբ}\ \begin{matrix} x=0 & \alpha=2\cdot 0^2+1=1 \\ x=2 & \beta=2\cdot 2^2+1=9 \end{matrix}$$

Այսպիսով,

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx=\int_1^9\sqrt{t}\,\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^9=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9=\frac{1}{6}\left(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$$

13. $\int_1^3\frac{5x}{\sqrt{2x^2+7}}dx$

Ընդունենք $t=2x^2+7$, այդ դեպքում $dt=(2x^2+7)'dx=4xdx$, որտեղից $xdx=\frac{dt}{4}$:

Երբ $x=1$, ստանում ենք $\alpha=2\cdot 1^2+7=9$:

Երբ $x=3$, ստանում ենք $\beta=2\cdot 3^2+7=25$:

Հետևաբար, $\int_1^3\frac{5x}{\sqrt{2x^2+7}}dx=\int_9^{25}\frac{5\cdot\frac{dt}{4}}{\sqrt{t}}=\frac{5}{4}\int_9^{25}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{t}\Big|_9^{25}=\frac{5}{2}\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right)=\frac{5}{2}(5-3)=5$:

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin^4 x\cos xdx$:

Եթե ընդունենք $t=\sin x$, ապա $dt=\cos xdx$:

Երբ $x=0$, ստանում ենք $\alpha=\sin 0=0$,

$x=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\sin\frac{\pi}{2}=1$: Այսպիսով,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin^4 x\cos xdx=\int_0^1 10t^4dt=2t^5\Big|_0^1=2:$$

15. $\int_1^e 4\frac{\ln^3 x}{x}dx$:

Նշանակենք $t=\ln x$, որտեղ $x\in[1;e]$:

$$dt=(\ln x)'dx=\frac{dx}{x}$$

Երբ $x=1$, $\alpha=\ln 1=0$

$x=e, \beta=\ln e=1$, հետևաբար

$$\int_1^e 4\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int_0^1 4t^3dt=t^4\Big|_0^1=1:$$

16. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$:

Ընդունենք $x=4\sin t$, որտեղից $dx=4\cos tdt$

Երբ $x=0$, ստանում ենք $0=4\sin t$, որտեղից $t=0$

Երբ $x=4$, ստանում ենք $4=4\sin t$, կամ $\sin t=1$ որտեղից $t=\frac{\pi}{2}$: Այսպիսով,

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos tdt=$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt=8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2tdt\right)=8\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=8\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0+\frac{\sin\pi}{2}-\frac{\sin 0}{2}\right)=8\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi$$

17. $J=\int_1^4 \sqrt{x^3}\ln xdx$:

Ընդունենք $t=\sqrt{x}$, այստեղից $x=t^2$ և $dx=2tdt$: Որոշենք ինտեգրման նոր սահմանները՝ $\alpha=\sqrt{1}=1, \beta=\sqrt{4}=2$, այսպիսով.

$$J=\int_1^4 \sqrt{x^3}\ln xdx=\int_1^2 t^3\cdot\ln t^2\cdot 2tdt=\int_1^2 t^3\cdot 2\ln t\cdot 2tdt=4\int_1^2 t^4\cdot\ln tdt$$

Ինտեգրալը հաշվենք մասերով ինտեգրումով: Նշանակենք

$$\left.\begin{matrix} u=\ln t \\ dv=t^4dt \end{matrix}\right| \begin{matrix} du=\frac{1}{t}dt \\ v=\int t^4dt=\frac{t^5}{5} \end{matrix}$$

$$J=4\left(\frac{t^5}{5}\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 \frac{t^5}{5}\cdot\frac{dt}{t}\right)=4\left(\frac{2^5}{5}\ln 2-\frac{1^5}{5}\ln 1-\int_1^2 \frac{t^4}{5}dt\right)=4\left(\frac{32}{5}\ln 2-\frac{t^5}{25}\Big|_1^2\right)=4\left(\frac{32}{5}\ln 2-\frac{32}{25}+\frac{1}{25}\right)=$$

$$=4\left(\frac{32}{5}\ln 2-\frac{31}{25}\right):$$

18. Հաշվել $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m xdx$, որտեղ m-ը բնական թիվ է:

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} xd(-\cos x) \text{ (մասերով ինտեգրենք)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} xd(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) d\sin^{m-1} x = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (m-1)\sin^{m-2} x \cdot \cos xdx = (m-1)\times$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{m-2} xdx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{m-2} xdx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} xdx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m xdx = (m-1)J_{m-2} -$$
$$-(m-1)J_m$$

Ստացանք անդրադարձ բանաձև:

$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m$ հավասարումից

$m \cdot J_m = (m-1)J_{m-2}$, որտեղից

$$J_m = \frac{m-1}{m} \cdot J_{m-2}$$

Նկատենք, որ $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, իսկ $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$:

օր. $J_8 = \frac{7}{8} \cdot J_6 = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} J_4 = \ldots = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

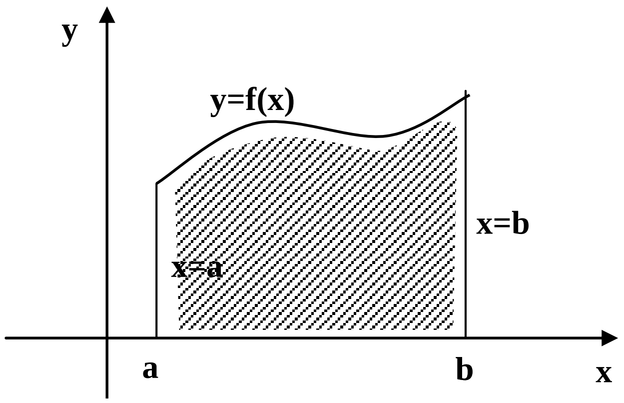
$$J_9 = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

Հարթ պատկերների մակերեսների հաշվումը

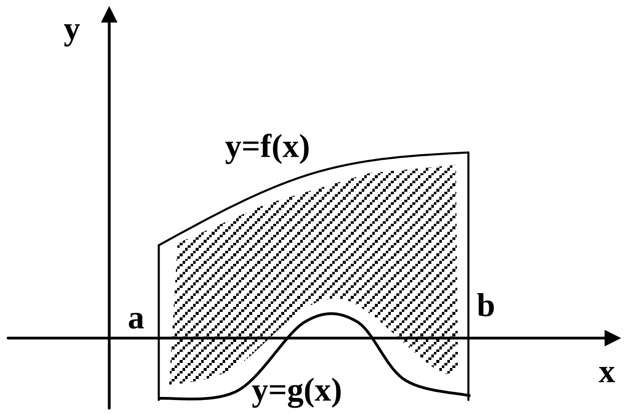
Պատկերը, որը սահմանափակված է [a;b] հատվածում անընդհատ և ոչ բացասական f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկով, x=a և x=b ուղիղներով և Ox առանցքով, կոչվում է կորագիծ սեղան:

Կորագիծ սեղանի մակերեսը թվապես հավասար է $\int_a^b f(x)dx$ -ի, այսինքն

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



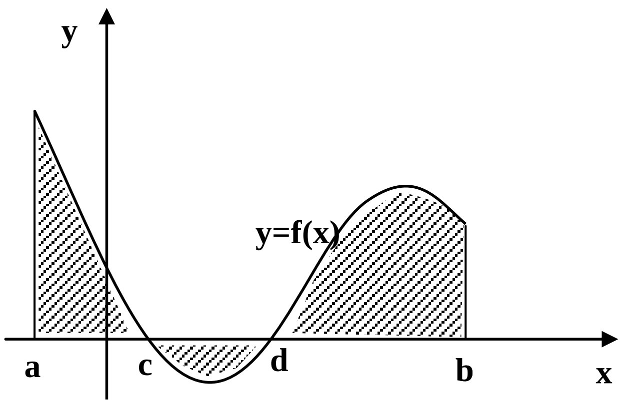
Նկ. 1



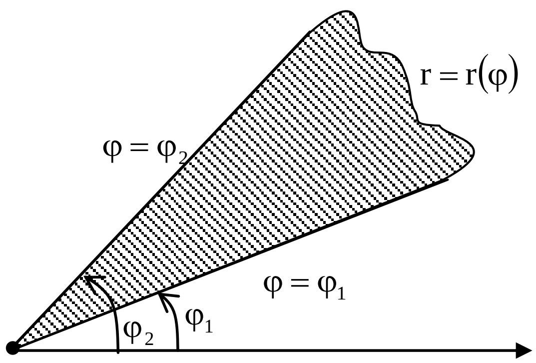
Նկ. 2

Եթե պատկերը սահմանափակված է [a,b] հատվածում անընդհատ երկու f(x) և g(x) ֆունկցիաների գրաֆիկներով և x=a, x=b ուղիղներով, որտեղ $f(x) \geq g(x)$ և $a \leq x \leq b$, ապա նրա մակերեսը հաշվվում է $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ բանաձևով:

Եթե f(x) ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա f(x) ֆունկցիայի գրաֆիկով Ox առանցքով և x=a, x=b ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը $(a \leq x \leq b)$ հաշվվում է $S = \int_a^b |f(x)|dx$ բանաձևով:



Նկ. 3



Նկ. 4

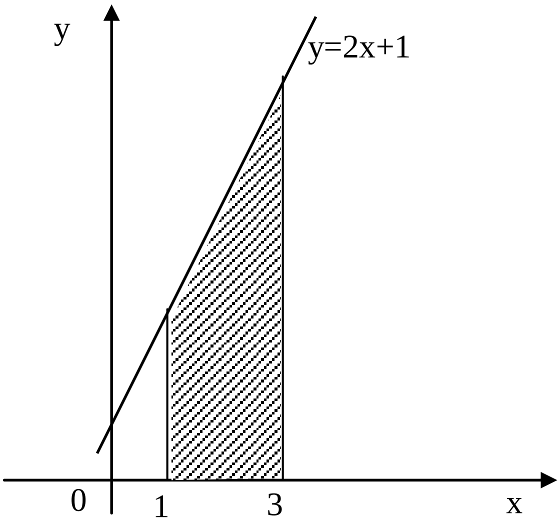
Օրինակ, Նկ. 3-ում պատկերված հարթ պատկերի մակերեսը հավասար է

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^d |f(x)|dx + \int_d^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx:$$

Եթե հարթ պատկերը դիտարկվում է բևեռային կոորդինատային համակարգում և սահմանափակված է $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ բևեռային ճառագայթներով և $r = r(\varphi)$ կորով, ապա նրա մակերեսը հաշվվում է $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$ բանաձևով:

Օրինակ 1. Հաշվել $y = 2x + 1, x = 1, x = 3$ ուղիղներով և Ox առանցքով սահմանափակված հարթ պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Կառուցենք նշված ուղիղների գրաֆիկները:

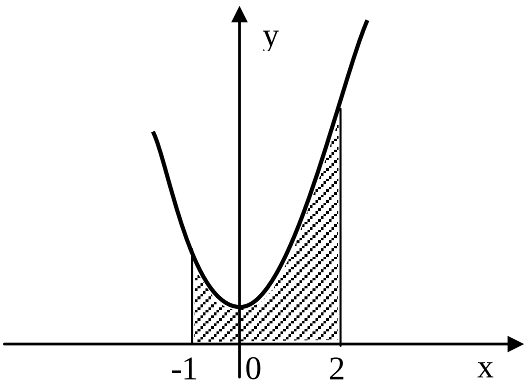


Հաշվենք ստվերագծված պատկերի մակերեսը.

$$S=\int_1^3(2x+1)dx=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^3=(9+3)-(1+1)=10$$

Օրինակ 2. Հաշվել $y=x^2+1, x=-1, x=2$ և $y=0$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Կառուցենք նշված պատկերը

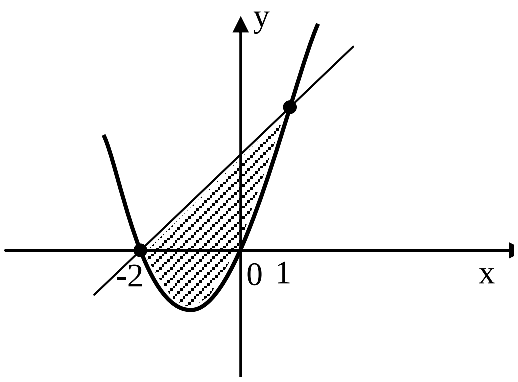


$$S=\int_{-1}^2(x^2+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Bigg|_{-1}^2=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-1\right)=\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1=6:$$

Օրինակ 3. Հաշվել պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=x^2+2x$ և $y=x+2$ գծերով:

Լուծում: Գտնենք ինտեգրման սահմանները: Նշված գծերի հատման կետերի աբսցիսները գտնում ենք $\begin{cases} y=x^2+2x \\ y=x+2 \end{cases}$ համակարգից:

Այստեղից $x^2+2x=x+2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$: Լուծելով հավասարումը՝ ստանում ենք. $x=-2$ և $x=1$, հետևաբար, $a=-2, b=1$:



Քանի որ $x \in [-2;1]$ հատվածում $x+2 \geq x^2+2x$, ուստի

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x+2-\left(x^2+2x\right)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)-$$

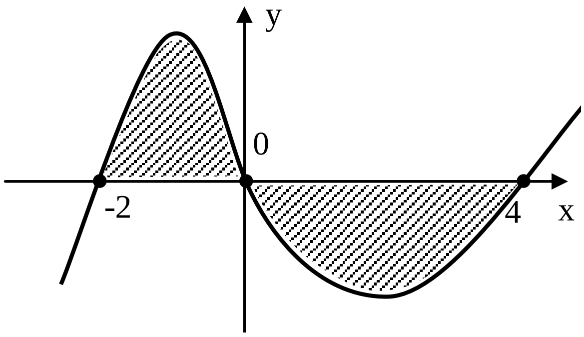
$$-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4=4{,}5:$$

Օրինակ 4. Հաշվել պատկերի մակերեսը, որն ընկած է Ox առանցքի և $y=x^3-2x^2-8x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջև:

Լուծում: Պատկերենք ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտնենք Ox-առանցքի հետ հատման կետերը: Երբ y=0 (Ox-առանցքի հավասարումն է) ստանում ենք

$$x^3-2x^2-8x=0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+2=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \text{ կամ } x=0, x=-2 \text{ և } x=4:$$



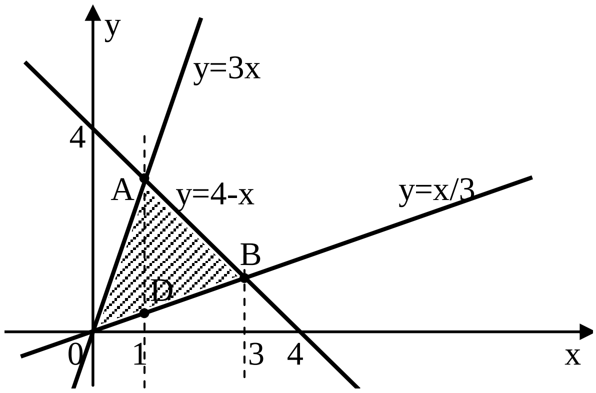
Հաշվենք գծապատկերված պատկերի մակերեսը:

$$S=\int_{-2}^{0}\left(x^3-2x^2-8x\right)dx-\int_{0}^{4}\left(x^3-2x^2-8x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{4}=$$

$$=-\left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2(-2)^3}{3}-4\cdot(-2)^2\right)-\left(\frac{4^4}{4}-\frac{2}{3}\cdot 4^3-4\cdot 4^2\right)=-\left(4+\frac{16}{3}-16\right)-\left(64-\frac{128}{3}-64\right)=$$

$$=6\frac{2}{3}-\left(-42\frac{2}{3}\right)=49\frac{1}{3}$$

Օրինակ 5. Հաշվել $x+y=4, y-3x=0$ և $3y-x=0$ ուղիղներով պարփակված պատկերի մակերեսը:



Գտնենք ուղիղների հատման կետերի աբսցիսները:

$$A:\begin{cases} y=3x \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow x=1;\ B:\begin{cases} y=\dfrac{x}{3} \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow x=3;\ 0:\begin{cases} y=3x \\ y=\dfrac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow x=0:$$

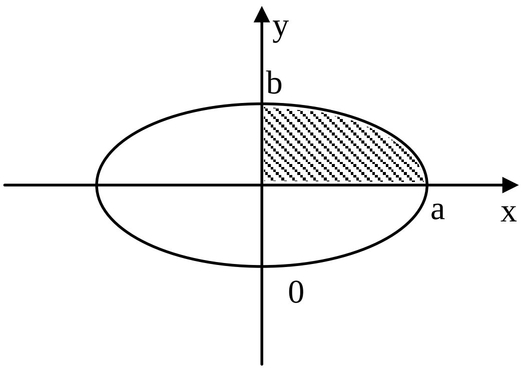
$$S=S_{OAD}+S_{DAB}=\int_0^1\left(3x-\frac{x}{3}\right)dx+\int_1^3\left((4-x)-\frac{x}{3}\right)dx=\int_0^1\frac{8x}{3}dx+\int_1^3\left(4-\frac{4}{3}x\right)dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\left(4x-\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3=\frac{4}{3}+$$

$$+\left(4\cdot3-\frac{2}{3}\cdot3^2\right)-\left(4\cdot1-\frac{2}{3}\cdot1^2\right)=\frac{4}{3}+12-6-4+\frac{2}{3}=4:$$

Օրինակ 6. Հաշվել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Քանի որ էլիպսը համաչափ է կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, բավական է հաշվել միայն առաջին քառորդում սահմանափակված մասի մակերեսը և քառապատկել`

$$S=4\int_0^a y\,dx=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$



Կատարենք փոփոխականի փոխարինում: Ընդունենք $x=a\cos t$

Երբ $x=0\Rightarrow a\cos t=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$x=a\Rightarrow a\cos t=a\Rightarrow t=0$$

$$dx=(a\cos t)'\,dt=-a\sin t\,dt:$$

Այսպիսով,

$$S = 4b\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\cos^2 t}\,(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t}\sin t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\sin t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \pi ab:$$

Օրինակ. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ էլիպսի մակերեսն է՝

$$S=\pi\cdot 5\cdot 4 = 20\pi, \text{ քանի որ } \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1 \Rightarrow a=5 \text{ և } b=4:$$

Երբ $a=b$ էլիպսը վերածվում է շրջանագծի՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2+y^2=a^2$, որի շառավիղը հավասար է a-ի: Հետևաբար, շրջանի մակերեսը կլինի $S=\pi a^2$, կամ, ինչպես ընդունված է, $S_{\text{շրջան}}=\pi R^2$, որտեղ R-ը շրջանի շառավիղն է:

Օրինակ 7. Հաշվել պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է բևեռային կոորդինատներով տրված $r=4\sin 2\varphi$ ֆունկցիայի գրաֆիկով:

Լուծում: Նախ գտնենք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

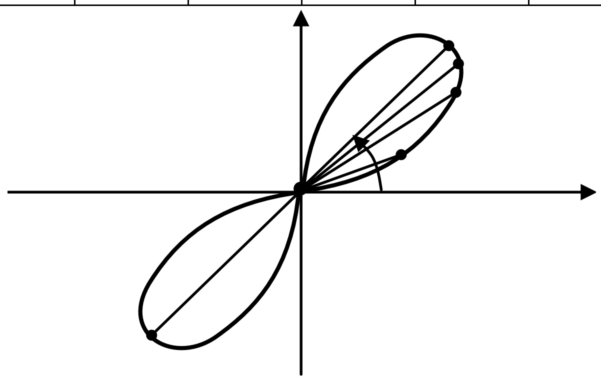
$$r\ge 0\Rightarrow 4\sin 2\varphi\ge 0\Rightarrow 2\pi k\le 2\varphi\le \pi+2\pi k \text{ կամ } \pi k\le\varphi\le\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z:$$

$$\text{Երբ } k=0\Rightarrow\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$k=1\Rightarrow\varphi\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$$

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար կազմում ենք աղյուսակ

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4



Գրաֆիկից պարզ է, որ

$$S=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\sin 2\varphi)^2d\varphi=32\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\varphi d\varphi=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=16\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=16\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{4}\right)-16\left(0-\frac{\sin(4\cdot 0)}{4}\right)=4\pi$$

Օրինակ 8. Հաշվել $r=2a\cos\varphi$ կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը, որտեղ a>0:

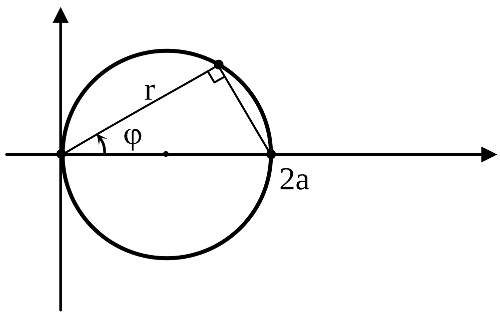
Լուծում: $r\geq 0\Rightarrow 2a\cos\varphi\geq 0\Rightarrow\cos\varphi\geq 0$

Այստեղից՝ $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\varphi)^2d\varphi=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=a^2\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-$$

$$-a^2\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)=a^2\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-a^2\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=\pi a^2$$

Եթե կառուցենք $r=2a\cos\varphi$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա կտեսնենք, որ այն a շառավղով շրջանագիծ է, որի մակերեսը հավասար է՝ $S=\pi a^2$:



Պտտման մարնի ծավալը

Երբ x=a, x=b ուղիղներով, y=f(x) կորով և Ox առանցքով սահմանափակված պատկերը (կորագիծ սեղան) պտտվում է Ox առանցքի շուրջը, ստացված պտտման մարմնի ծավալը հաշվվում է $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ բանաձևով:

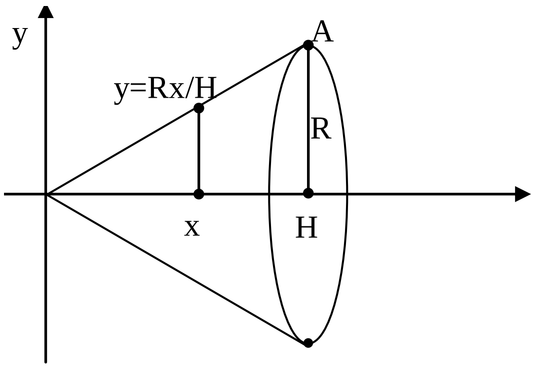
Իսկ եթե y=c, y=d ուղիղներով և $x=\varphi(y)$ կորով սահմանափակված պատկերը պտտվում է Oy առանցքի շուրջը, ապա

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\varphi^2(y)dy:$$

Եթե մարմինը ընկած է Ox առանցքին ուղղահայաց x=a և x=b հարթությունների միջև և հայտնի է Ox առանցքին ուղղահայաց ցանկացած հատույթի $S(x)$ մակերեսը $(a \le x \le b)$, ապա նրա ծավալը հաշվվում է $V = \int_a^b S(x)dx$ բանաձևով:

Օրինակ 1. Հաշվել կոնի ծավալը, որի հիմքի շառավիղը R է, իսկ բարձրությունը H:

Լուծում: Կոն կարելի է ստանալ ուղղանկյուն եռանկյունը իր էջի շուրջը պտտելով:



Ox առանցքն ուղղենք կոնի առանցքով: Այդ դեպքում OA ուղղի հավասարումը կլինի $y = \frac{R}{H}x$, որտեղ $0 \le x \le H$:

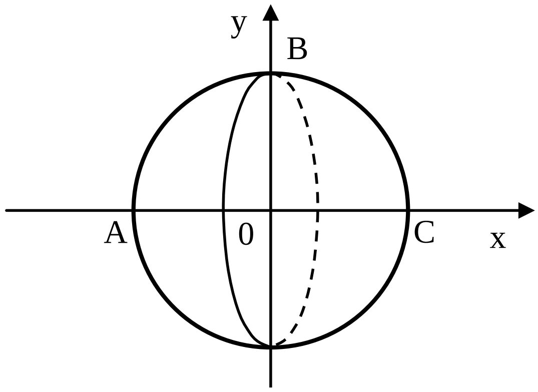
$$V_{կոն} = \pi\int_0^H y^2dx = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^2dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{\pi R^2}{3H^2}H^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Այսպիսով, $V_{կոն} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$:

Եթե R=3, H=4, ապա $V = \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 4 = 12\pi$:

Օրինակ 2. Հաշվել R շառավղով գնդի ծավալը:

Լուծում: Գունդ ստացվում է, երբ կիսաշրջանը պտտվում է իր տրամագծի շուրջը: Ox առանցքն ուղղենք կիսաշրջանի տրամագծով, իսկ որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընտրենք այդ տրամագծի միջնակետը: Այդ դեպքում շրջանագծի հավասարումը կլինի $x^2 + y^2 = R^2$: Այստեղից $y^2 = R^2 - x^2$, $-R \le x \le R$: Քանի որ գունդը համաչափ մարմին է, ուստի նրա ծավալը հավասար է 0-ից մինչև R սահմաններում գտնվող ծավալի կրկնապատիկին:

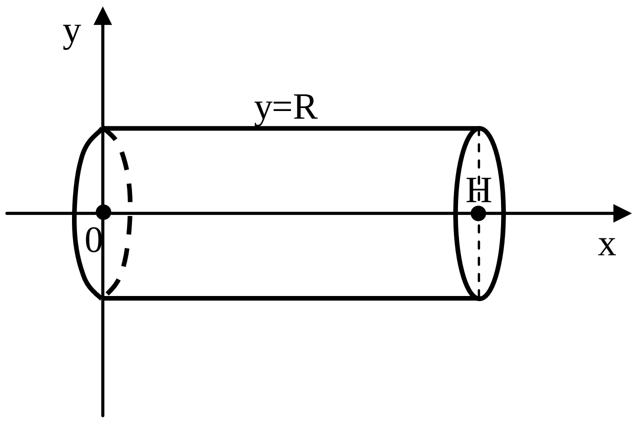


$$V=2\pi\int_0^R y^2dx=2\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Այսպիսով, $V_{\text{գունդ}}=\frac{4}{3}\pi R^3$:

Երբ R=3, $V=\frac{4}{3}\pi 3^3=36\pi$:

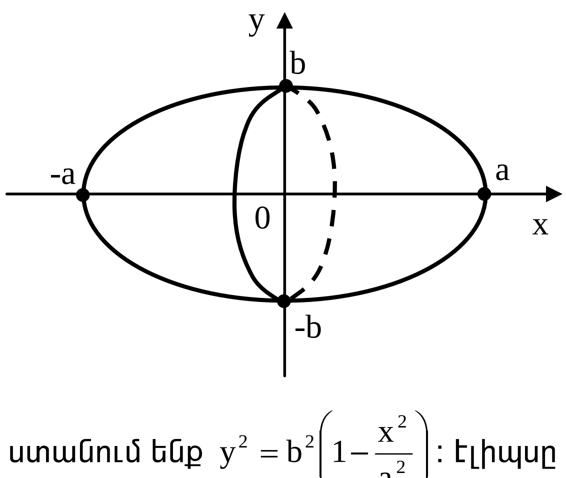
Օրինակ 3. Ենթադրենք y=R ուղիղը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը $0\le x\le H$ հատվածում: Հաշվել ստացված գլանի ծավալը:



$$V=\pi\int_0^H y^2dx=\pi\int_0^H R^2dx=\pi R^2x\Big|_0^H=\pi R^2H:$$

Այսպիսով, $V_{\text{գլան}}=\pi R^2H$: Եթե R=2 և H=3, ապա $V_{\text{գլան}}=\pi\cdot 2^2\cdot 3=12\pi$:

Օրինակ 4. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը Ox առանցքի շուրջը պտտելուց (պտտման էլիպսոիդ):

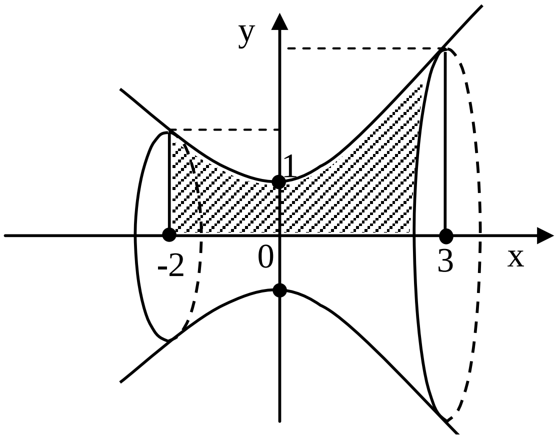


Էլիպսի հավասարումից ստանում ենք $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$: Էլիպսը Ox առանցքը հատում է x=-a և x=a կետերում: Օգտվելով էլիպսի համաչափությունից Oy առանցքի նկատմամբ՝ կարող ենք հաշվել պտտման մարմնի ծավալը x=0 և x=a սահմանների միջև և կրկնապատկել.

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=2\pi b^2\cdot\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}\pi b^2a:$$

Եթե էլիպսը պտտենք Oy առանցքի շուրջը, ապա կստանանք $V=\frac{4}{3}\pi a^2b$ բանաձևը: Մասնավոր դեպքում, երբ a=b, էլիպսը վերածվում է շրջանագծի, իսկ պտտման էլիպսորդը՝ գնդի: Ստացված երկու վերջին բանաձևերից էլ ստանում ենք $V_{գունդ}=\frac{4}{3}\pi a^3$, որն արդեն հաշվել էինք օրինակ 2-ում:

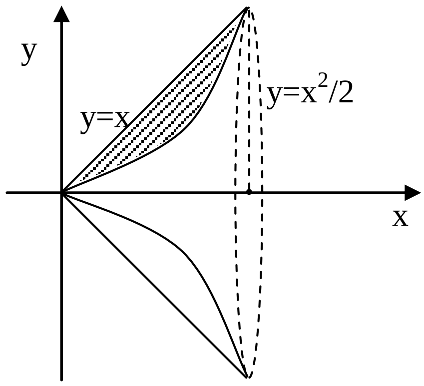
Օրինակ 5. Հաշվել $y=x^2+1$ կորով, Ox առանցքով և $x=-2, x=3$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանը Ox առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը:



$$V=\pi\int_{-2}^{3}y^2dx=\pi\int_{-2}^{3}\left(x^2+1\right)^2dx=\pi\int_{-2}^{3}\left(x^4+2x^2+1\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-2}^{3}=\pi\left(\frac{3^5}{5}+\frac{2\cdot 3^3}{3}+3\right)-$$

$$-\pi\left(\frac{(-2)^5}{5}+\frac{2(-2)^3}{3}+(-2)\right)=\pi\left(\frac{243+32}{5}+\frac{2}{3}(27+8)+3+2\right)=\pi\left(55+\frac{70}{3}+5\right)=83\frac{1}{3}\pi$$

Օրինակ 6. Հաշվել $y=\frac{x^2}{2}$ և $y=x$ գծերով սահմանափակված պատկերը Ox առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը:



Նախ գտնենք այդ գծերի հատման կետերի աբսցիսները.

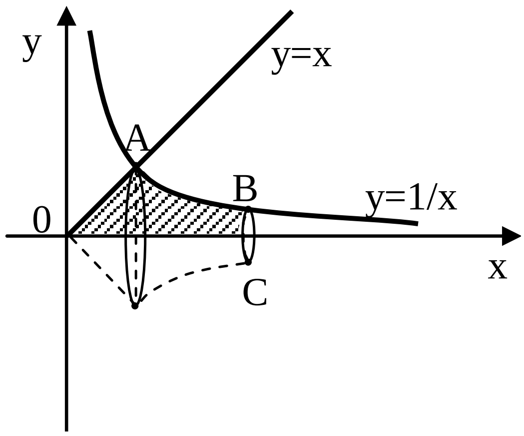
$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = x \Rightarrow x = 0, x = 2:$$

Ինչպես երևում է գծագրից, ստացված մարմնի ծավալը երկու պտտման մարմինների ծավալների տարբերությունն է՝ $V = V_1 - V_2$, որտեղ $V_1 = \pi\int_0^2 x^2dx = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$ և

$$V_2 = \pi\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^2 x^4dx = \pi\frac{x^5}{20}\Big|_0^2 = \frac{\pi\cdot 2^5}{20} = \frac{8\pi}{5}:$$

Այսպիսով, $V = \frac{8\pi}{3} - \frac{8\pi}{5} = \frac{16\pi}{15} = 1\frac{1}{15}\pi$:

Օրինակ 7. Հաշվել Ox առանցքով, $y = x, y = \frac{1}{x}$ և $x = 3$ գծերով սահմանափակված պատկերը Ox առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը $(x > 0)$:

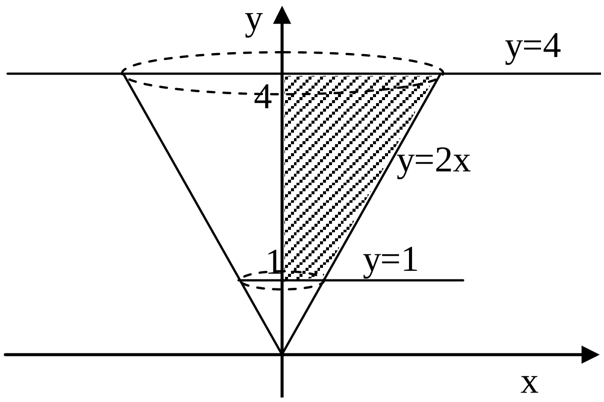


Նախ գտնում ենք $y = x, y = \frac{1}{x}$ գծերի հատման կետը, որի համար լուծում ենք $\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ համակարգը: Երբ $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$: Հեշտ է տեսնել, որ $V = V_1 + V_2$, որտեղ

$V_1 = \pi\int_0^1 x^2dx = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$, իսկ $V_2 = \pi\int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^3 x^{-2}dx = \frac{-1}{x}\pi\Big|_1^3 = -\pi\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2\pi}{3}$:

Այսպիսով, $V = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$:

Օրինակ 8. Պատկերը, որը սահմանափակված է Oy առանցքով $y = 2x, y = 1$ և $y = 4$ ուղիղներով պտտվում է Oy առանցքի շուրջը: Հաշվել ստացված պտտման մարմնի ծավալը:



$y = 2x$ ուղղի հավասարումից գտնում ենք $x = \frac{y}{2}$:

$$V = \pi\int_1^4 x^2 dy = \pi\int_1^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\frac{y^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{\pi}{12}\left(4^3 - 1^3\right) = \frac{\pi}{12}(64-1) = \pi\cdot\frac{63}{12} = \frac{21}{4}\pi = 5{,}25\pi:$$

Տեսական հարցեր

1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ:
2. Անորոշ ինտեգրալների աղյուսակը:
3. Անորոշ ինտեգրալի հիմնական հատկությունները:
4. Անմիջական ինտեգրում:
5. Փոփոխականի փոխարինումը անորոշ ինտեգրալում:
6. Մասերով ինտեգրում:
7. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը:
8. Որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստը:
9. Որոշյալ ինտեգրալի հիմնական հատկությունները:
10. Միջին արժեքի մասին թեորեմը:
11. Փոփոխական վերին սահմանով որոշյալ ինտեգրալ:
12. Նյուտոնի-Լայբնիցի բանաձևը:
13. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում:
14. Մասերով ինտեգրումը որոշյալ ինտեգրալում:
15. Հարթ պատկերների մակերեսների հաշվումը:
16. Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը:

Առաջարկվող խնդիրներ

Անմիջական ինտեգրումով հաշվել ինտեգրալները

1. $\int 5dx$ 2. $\int \frac{2}{3}xdx$ 3. $\int \frac{3}{4}x^2dx$

4. $\int \frac{5}{6}x^5dx$ 5. $\int \frac{4}{7}x^7dx$ 6. $\int \frac{4}{8}x^6dx$

7. $\int \frac{3}{x}dx$ 8. $\int \frac{5}{x^2}dx$ 9. $\int \frac{2}{3x^3}dx$

10. $\int \sqrt{x}dx$ 11. $\int 10\sqrt[3]{x^2}dx$ 12. $\int 32\sqrt[5]{x^3}dx$

13. $\int \frac{10}{7\sqrt{x}}dx$ 14. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 15. $\int \frac{6}{\sqrt[5]{x^4}}dx$

16. $\int (3x^2 - 4x)dx$ 17. $\int \frac{5x^3 - 4x + 6}{x}dx$ 18. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x}}dx$

19. $\int \frac{3x^6 + 4x^2 + 1}{x^3}dx$ 20. $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})dx$ 21. $\int x^2(x+1)^2dx$

22. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ 23. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$ 24. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$

25. $\int \frac{\sqrt{x} - x^2e^x + 1}{x^2}dx$ 26. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ 27. $\int \left(\frac{1}{x} + 2x\right)^2 dx$

28. $\int (3\cdot 5^x - 2\cdot 3^x)dx$ 29. $\int \frac{e^{2x}+2}{e^x}dx$ 30. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$

31. $\int \left(4\sin x - \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$ 32. $\int \left(2\cdot e^x - 3\cos x + \frac{10}{x}\right)dx$ 33. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 35. $\int \frac{5dx}{\sqrt{7-x^2}}$ 36. $\int \frac{dx}{16+x^2}$

37. $\int \frac{4dx}{5+x^2}$ 38. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$

40. $\int \frac{(\mathrm{arctg}\,x)^3}{1+x^2}dx$ 41. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 42. $\int e^{\sin x}\cos xdx$

43. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$ 44. $\int \frac{3 - 2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$ 45. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$

46. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$ 47. $\int 2^x\cdot 3^x dx$ 48. $\int 2^{2x}\cdot 3^x dx$

49. $\int \frac{4^x}{5^x}dx$ 50. $\int \frac{(3^x - 2^x)^2}{3^x\cdot 2^x}dx$ 51. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

52. $\int tg^2xdx$

53. $\int ctg^2xdx$

54. $\int (3-2x)^3dx$

55. $\int xe^{x^2}dx$

56. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

57. $\int \frac{dx}{3x+1}$

58. $\int \frac{dx}{(5-4x)^7}$

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

60. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

62. $\int x^3(2+x)^2dx$

63. $\int \frac{dx}{2-3x}$

64. $\int (3^x+x^3)dx$

65. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$

66. $\int (\sqrt{x}+2)^2dx$

67. $\int (x^2-3)\sqrt{x}dx$

68. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{x^2+4}}$

69. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$

70. $\int 5\cos 2xdx$

71. $\int 7\sin 3xdx$

72. $\int \frac{6}{\cos^2 3x}dx$

73. $\int \frac{3}{2\sin^2 5x}dx$

74. $\int 4e^{3x}dx$

75. $\int 10e^{-2x}dx$

76. $\int 5\cdot 3^{4x}dx$

77. $\int \left(4\cdot e^{8x}-\frac{9}{\sin^2 3x}\right)dx$

78. $\int \left(\frac{10}{\cos^2 5x}-6e^{3x}\right)dx$

79. $\int (6x^2-5\sin 4x+2)dx$

80. $\int \sin^2 xdx$

81. $\int \cos^2 3xdx$

82. $\int \frac{1}{3x+1}dx$

83. $\int \frac{5dx}{2x+3}$

84. $\int \frac{2dx}{5-3x}$

85. $\int \frac{4dx}{5+2x}$

86. $\int \frac{3dx}{6-7x}$

87. $\int 7tg^2 4xdx$

88. $\int 9ctg^2 3xdx$

89. $\int x^2e^{x^3}dx$

Հաշվել ինտեգրալները տեղադրման մեթոդով

1. $\int \cos(5x+6)dx$

2. $\int \sin(4-3x)dx$

3. $\int (3x-7)^6dx$

4. $\int (5x+3)^{10}dx$

5. $\int \frac{8}{(2x+1)^7}dx$

6. $\int 9\cdot e^{3x+5}dx$

7. $\int 4\cdot e^{4x-1}dx$

8. $\int \frac{10}{3}e^{5x+6}dx$

9. $\int \frac{10}{(2x-3)^5}dx$

10. $\int \frac{20}{3e^{2x}}dx$

11. $\int \frac{3}{4e^{3x}}dx$

12. $\int \frac{2x}{3+4x^2}dx$

13. $\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}dx$

14. $\int 5x\sqrt{2x^2+9}dx$

15. $\int 2x(4x^2-5)^6dx$

16. $\int 7\cos^3 t\sin tdt$

17. $\int \sin^2 x\cos xdx$

18. $\int 5\cos^4 t\sin tdt$

19. $\int 8\sin^3 x\cos x dx$ 20. $\int \cos^6 x\sin^3 x dx$ 21. $\int \sin^2 t\cos^3 t dt$

22. $\int \sin^5 x\cos^3 x dx$ 23. $\int 8\sin^2 x\cos^2 x dx$ 24. $\int 16\sin^2 x\cos^4 x dx$

25. $\int 8\sin^4 t dt$ 26. $\int \cos^6 t dt$ 27. $\int \frac{dt}{\cos^4 t}$

28. $\int \frac{5dt}{\sin^6 t}$ 29. $\int \frac{8\sin t dt}{\cos^7 t}$ 30. $\int 10\sin 3x\cos 2x dx$

31. $\int 5\sin 4x\cos x dx$ 32. $\int 42\sin 2x\cos 5x dx$ 33. $\int 18\sin 5x\cos 4x dx$

34. $\int 63\cos 5x\cos 2x dx$ 35. $\int 6\cos x\cos 8x dx$ 36. $\int 2\sin 8x\sin 3x dx$

37. $\int 20\sin 7x\sin 3x dx$ 38. $\int 3\sin 5x\sin 3x dx$ 39. $\int 18\cos 4x\cos 2x dx$

40. $\int \frac{10}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 41. $\int \sqrt{9-x^2}dx$ 42. $\int \frac{3dx}{\sqrt{16-x^2}}$

43. $\int \frac{4dx}{\sqrt{25-x^2}}$ 44. $\int \frac{12dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ 45. $\int \sqrt{16-9x^2}dx$

46. $\int \sqrt{9-25x^2}dx$ 47. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}$ 48. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$

49. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)}$ 50. $\int x^2\sqrt{x-1}dx$ 51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \left(\text{ՆՇ}.x=\frac{1}{t}\right)$

52. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ 53. $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 54. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

55. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$ 56. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ 57. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

58. $\int \frac{1+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$ 59. $\int x\cos x^2 dx$ 60. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}dx$

61. $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 62. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 63. $\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx$

64. $\int \frac{dx}{(x-9)\sqrt{x}}$ 65. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ 66. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$

Մասերով ինտեգրման մեթոդով հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1. $\int xe^x dx$ 2. $\int (2x+3)e^{2x}dx$ 3. $\int (3x-2)e^{-4x}dx$

4. $\int x^2e^x dx$ 5. $\int (3x^2-4x)e^{-x}dx$ 6. $\int (x^2-2x+5)e^{3x}dx$

7. $\int x\sin x dx$ 8. $\int (2x-1)\sin 3x dx$ 9. $\int x\sin(2x+5)dx$

10. $\int x\cos x dx$

11. $\int (5x+2)\cos 5x dx$

12. $\int (3x+1)\cos(3x-2)dx$

13. $\int x^2\sin 3x dx$

14. $\int (x^2-2x)\cos x dx$

15. $\int (x^2+4)\cos 4x dx$

16. $\int \ln x dx$

17. $\int x\ln x dx$

18. $\int (4x+5)\ln x dx$

19. $\int x^4\ln x dx$

20. $\int (3x^2-4x)\ln x dx$

21. $\int \ln(4x^2+1)dx$

22. $\int \ln(x^2+4)dx$

23. $\int \ln(x^2-1)dx$

24. $\int \sqrt{x}\ln x dx$

25. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$

26. $\int \arcsin x dx$

27. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

28. $\int \frac{xdx}{\sin^2 3x}$

29. $\int \frac{2xdx}{3\cos^2 4x}$

30. $\int x\arcsin x dx$

31. $\int x\arccos x dx$

32. $\int e^x\cos 3x dx$

33. $\int e^{-2x}\sin x dx$

34. $\int e^{5x}\cos 2x dx$

35. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$

36. $\int \frac{x\sin x dx}{\cos^3 x}$

37. $\int \frac{x\sin x dx}{\cos^5 x}$

38. $\int \sin\ln x dx$

39. $\int \cos\ln x dx$

40. $\int \sqrt{x^3}\ln x$

41. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$

42. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

43. $\int \sqrt{x^2+4}dx$

44. $\int \sqrt{9-x^2}dx$

Ինտեգրել ռացիոնալ կոտորակները

1. $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}dx$

2. $\int \frac{11-3x}{x^2+2x-3}dx$

3. $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$

4. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

5. $\int \frac{dx}{2x^2+7x+3}$

6. $\int \frac{dx}{3x^2-6x+4}$

7. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$

8. $\int \frac{5x-7}{x^2+8x+20}dx$

9. $\int \frac{5x-4}{x^2-8x+7}dx$

10. $\int \frac{3x-6}{x^2-2x+10}dx$

11. $\int \frac{x^3}{x+1}dx$

12. $\int \frac{x^2-4}{x^2+4}dx$

13. $\int \frac{3x^2+3}{x^2-3x+2}dx$

14. $\int \frac{2x^2-9x-35}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$

15. $\int \frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}dx$

16. $\int \frac{x^2-3x+6}{x(x-2)(x-1)}dx$

17. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$

18. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$

19. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

20. $\int \frac{5x^2+9x+6}{x(x+1)(x+2)}dx$

21. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

22. $\int \frac{5x+2}{x(x+1)^2}dx$

23. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$

24. $\int \frac{18+21x-x^2}{(x-5)(x+2)^2}dx$

25. $\int \frac{5x^2-30x+44}{(x-2)^3}dx$

26. $\int \frac{dx}{x^3+8}$

27. $\int \frac{x^6+16}{x^4-16}dx$

28. $\int \frac{dx}{x^3-27}$

29. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$

30. $\int \frac{-2x^3+4x^2+6x+3}{x^2(x^2+3)}dx$

Գտնել ինտեգրալները.

1. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}-1)\sqrt[4]{x^3}}$

2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+\sqrt{x})x}dx$

4. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

5. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt[3]{x}}$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}dx$

10. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$

11. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

12. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

13. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

16. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

17. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$

18. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

19. $\int \frac{dx}{\sin x}$

20. $\int \frac{dx}{\cos x}$

21. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

22. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$

23. $\int \frac{dx}{7-3\sin x+6\cos x}$

24. $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$

25. $\int tg^3 x dx$

26. $\int tg^4 x dx$

27. $\int \sin^5 x dx$

28. $\int \cos^3 x dx$

29. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x\cos x}dx$

30. $\int tg^3 x \frac{dx}{\cos^4 x}$

31. $\int \frac{\sin^2 x}{1+2\cos^2 x}dx$

32. $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}dx$

33. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

34. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+tg^2 x}$

35. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$

Հաշվել որոշյալ ինտեգրալները

1. $\int_1^3 4x^2 dx$

2. $\int_{-1}^{2}(2-x^2)dx$

3. $\int_0^{\pi} \frac{4}{5}\sin x dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos 2x dx$

5. $\int_0^1 6e^{3t}dt$

6. $\int_2^4 \frac{2}{3x}dx$

7. $\int_1^3 \frac{3x^3+1}{x}dx$ 8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin 2x - 2\cos 3x)dx$ 9. $\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 4x}$

10. $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ 11. $\int_1^3 \sqrt{x+1}dx$ 12. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

13. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 14. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{3+2\cos t}$

16. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ 17. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^4}$ 18. $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx$

19. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 20. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ 21. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$ 23. $\int_0^1 2xe^x dx$ 24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx$ 26. $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$ 27. $\int_1^e \ln^2 xdx$

28. $\int_1^2 (3x+2)\ln xdx$ 29. $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ 30. $\int_1^2 x\ln xdx$

31. $\int_0^1 x^2 \mathrm{arctg} xdx$ 32. $\int_0^3 x\,\mathrm{arctg} xdx$ 33. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

34. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$ 35. $\int_1^9 \sqrt{x}\ln xdx$ 36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 xdx$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 xdx$ 38. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} xdx$ 39. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 xdx$

40. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x\cos^3 2xdx$

Գտնել տրված գծերով սահմանափակված հարթ պատկերի մակերեսը

1. $y=x^2-2x, y=4-2x$ 2. $y=x^2, y^2=x$ 3. $y=x^2+2x, y=x+2$

4. $y=x^3, y=2x^2$ 5. $y=x^2+1, y+x=7$ 6. $y=\frac{x^2}{2}, x^2+y^2=8$

7. $xy=4, x=1, x=4, y=0$ 8. $xy=4, y=x, x=4, y=0$ 9. $y=x, x+y=4, y=0$

10. $y=\sin x, 0\le x\le\pi, y=0$ 11. $xy=3, x+y=4$ 12. $2x+y-3=0, x+y-1=0, y=0$

13. $x-2y+4=0, x+y-5=0, y=0$ 14. $x-2y-5=0, y=-2x, y=0$ 15. $y=x^2, y=2x$

16. $y = x^2, y = -3x$

17. $y = x^2, y = 2x + 1$

18. $y = x^2, y = 2x + 8$

19. $y = x^2, y = x + 2$

20. $y = x^2, y = 5x - 6$

21. $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1$

22. $y = 2x^2 + 1, y = x^2 + 10$

23. $y = 2 - x^2, y = x$

24. $y = x^2 + 1, x + y = 3$

25. $y = 2x - x^2, y + x = 0$

26. $y = x^2, x + y = 2$

27. $xy = 6, x + y = 7$

28. $y = 6 - x^2, y = x$

29. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$

30. $y = -x, y = 2x - x^2$

31. $x^2 + y^2 = 4x$

32. $x^2 + y^2 = 6y$

33. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$

34. $r = 2(1 + \cos\varphi)$

Գտնել Ox առանցքի շուրջը տրված գծերով սահմանափակված պատկերի պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

1. $y = x, y = 0, x = 2, x = 6$

2. $xy = 2, y = 0, x = 1, x = 4$

3. $x - 2y + 6 = 0, y = 0, x = 2$

4. $x + 2y - 4 = 0, y = 0, x = 0$

5. $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 9$

6. $x^2 + y^2 = 0, y = 0$

7. $x - 2y = 0, y = 0, x = 10$

8. $y = \sin x, y = 0, 0 \le x \le \pi$

9. $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

10. $x^2 - y^2 = 4, y = 0, x = 2, x = 4$

11. $x^2 + y^2 = 4x, y = 0$

12. $y^2 = 4x, y = x$

13. $y^2 = 9x, y = -3x$

14. $y = x, x + y = 2, y = 0$

15. $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e$

16. $y^2 = 9(x + 3), x - y + 3 = 0$

17. $y = 2x, xy = 2, x = 4, y = 0$

18. $y^2 = 4(x + 2), x - y + 2 = 0$

19. $y = x^2 + 4, x = 1, x = 4, y = 0$

20. $y = 2x^2 + 3, x = 0, x = 2, y = 0$

21. $xy = 3, x = 1, x = 3, y = 0$

22. $y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, x = -1, x = 2$

23. $y^2 = 4x, x = 1, x = 5$

24. $x^2 + y^2 = 4, y = 0$

25. $x^2 - y^2 = 4, y = 0, x = 2, x = 4$

26. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, y = 0, x = 3, x = 6$

27. $y^2 = 4(x - 2), y = 0, x = 0$

28. $y = x^2, y^2 = 8x$

29. $y = 4e^x, x = 0, x = 2$

30. $y = -x^2 - x, y = 0$