Կրիտիկական կետեր, մոնոտոնություն, էքստրեմումներ

Սահմանում 1 f ֆունկցիան կոչվում է X բազմության վրա աճող, եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) < f(x_2)$:

f ֆունկցիան կոչվում է X բազմության վրա նվազող, եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) > f(x_2)$

Աճող և նվազող ֆունկցիաներն ունեն ընդհանուր անվանում՝ մոնոտոն ֆունկցիաներ:

Δ միջակայքն անվանում են f ֆոնկցիայի մոնոտոնության միջակայք, եթե f ֆունկցիան այդ միջակայքի վրա մոնոտոն է, այսինքն՝ կա՛մ աճող է, կամ նվազող:

Սահմանում 2 x_0 կետը կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ն պարունակող այնպիսի (a,b) միջակայք, որին պատկանող ցանկացած x-ի համար $f(x_0) \geq f(x)$.

Սահմանում 3 x_0 կետը կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ն պարունակող այնպիսի (a,b) միջակայք, որին պատկանող ցանկացած x-ի համար $f(x_0) \leq f(x)$.

Սահմանում 4. Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետը կոչվում է կրիտիկական կետ, եթե այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը 0 է, կամ գոյություն չունի:

Սահմանում 5. Ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր, իսկ ֆունկցիայի արժեքները այդ կետերում՝ էքստրեմումներ:

Օրինակ1 ա) Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը (10-րդ դաս. 195(դ))

$$f(x) = \sin^2 x$$

Լուծում $D(f) = R$, $f'(x) = (sin^2 x)' = 2 sin x \cdot (sin x)' = 2 sin x cos x = sin 2x$;

$sin 2x = 0$; $2x = \pi n$

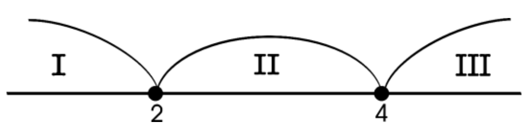
Պատ.՝ $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

բ) 196(դ) $f(x) = |2-x| + |2x-8|$

$D(f) = R$

$2-x=0$ $2x-8=0$

$x=2$ $x=4$



Պարզենք $f(x)$-ի տեսքը I, II և III միջակայքերի ներքին կետերում՝

Եթե $x \in (-\infty;2)$, ապա

$f(x) = 2 - x - 2x + 8 = 10 - 3x \Rightarrow f'(x) = -3 \neq 0$, այսինքն $(-\infty;2)$ միջակայքում $f(x)$-ը կրիտիկական կետ չունի:

Եթե $x \in (2;4)$, ապա

$f(x) = -2 + x - 2x + 8 = 6 - x \Rightarrow f'(x) = -1 \neq 0$, այսինքն $(2;4)$ միջակայքում կրիտիկական կետ չկա:

Եթե $x \in (4;\infty)$, ապա

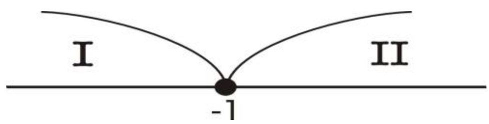
$f(x) = -2x + x + 2x - 8 = 3x - 10 \Rightarrow f'(x) = 3 \neq 0$, այսինքն $(4;\infty)$ միջակայքում կրիտիկական կետ չկա:

Քանի որ $|x|$-ը $x = 0$ կետում ածանցյալ չունի, (իսկ $x \neq 0$ դեպքում ածանցյալ ունի)ապա $|2-x|$-ը և $|2x-8|$-ը ածանցյալ չունեն $x = 2$ և $x = 4$ կետերում. դրանք էլ հենց կլինեն կրիտիկական կետերը, որովհետև, եթե օրինակ $x = 2$ կետում $f(x)$-ը ունենար ածանցյալ, ապա $|2-x| = f(x) - |2x-8|$ հավասարության աջ մասը $x = 2$ կետում կունենար ածանցյալ, քանի որ $|2x-8|$-ը բացի $x = 4$ կետից մնացած բոլոր կետերում (մասնավորապես $x = 2$ կետում) ունի ածանցյալ և կստացվեր, որ $|2-x|$-ը $x = 2$ կետում ունի ածանցյալ.

Պատ.՝ $x = 2$
$x = 4$

գ) $f(x) = 3x^2 - 2x + |x+1|$ (10-րդ 220(ա))

$D(f) = R$. $x + 1 = 0$; $x = -1$



Պարզենք $f(x)$-ի տեսքը I և II միջակայքերի ներքին կետերում՝

Եթե $x \in (-\infty;-1)$, ապա

$f(x) = 3x^2 - 2x - x - 1 = 3x^2 - 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3$; $6x - 3 = 0$;

$x = \frac{1}{2} \notin (-\infty;-1)$,

Եթե $x \in (-1;+\infty)$, ապա

$f(x) = 3x^2 - 2x + x + 1 = 3x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x - 1; 6x - 1 = 0$;

$x = \frac{1}{6} \in (-1;+\infty)$,

Այսինքն $x = \frac{1}{6}$-ը կրիտիկական կետ է:

Քանի որ $|x+1|$ ֆունկցիան $x=-1$ կետում ածանցյալ չունի, ապա $f(x)$-ը նույնպես այդ կետում ածանցյալ չունի, որովհետև հակառակ դեպքում (այսինքն եթե $f(x)$-ը $x=-1$ կետում ունենար ածանցյալ)

(1) $|x+1| = f(x)-3x^2+2x$-ից կստացվեր, որ $|x+1|$-ը $x=-1$ կետում ունի ածանցյալ, որովհետև (1) հավասարության աջ մասը այդ կետում ունի ածանցյալ: Այսպիսով, $x=-1$-ը նույնպես $f(x)$-ի կրիտիկական կետ է:

Պատ.՝ $x=\frac{1}{6},\ x=-1$

<u>Օրինակ 2</u> (<u>10-րդ դաս</u>. 221)

Ցույց տալ որ ֆունկցիան կրիտիկական կետեր չունի.

ա) $f(x)=3x^5+5x^3-2x^2+9x-21$

<u>Լուծում</u>. Պետք է ցույց տալ, որ $f'(x)=0$ հավասարումը լուծում չունի, քանի որ $f'(x)$-ը գոյություն ունի ցանկացած կետում:

Իրոք,

$$f'(x)=15x^4+15x^2-4x+9=15x^4+14x^2+\underline{x^2-4x+4}+5=$$

$$=15x^4+14x^2+(x-2)^2+5>0,$$

քանի որ առաջին երեք գումարելիները ոչ բացասական են, իսկ $5>0$:

բ) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+10x-\frac{1}{2}\sin 2x$

$$f'(x)=4x^2-12x+10-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x(2x)'=4x^2-12x+9+1-\cos 2x=$$

$$=(2x-3)^2+2\sin^2 x>0,$$

որովհետև $(2x-3)^2=0$ միայն $x=\frac{3}{2}$ դեպքում, իսկ այդ արժեքի համար $2\sin^2\frac{3}{2}>0 \Rightarrow f'(x)=0$ հավասարումը լուծում չունի, այստեղից բխում է, որ կրիտիկական կետեր չկան:

<u>Օրինակ 3</u> (9-րդ դաս. 251)

Դիցուք f ֆունկցիան աճող է և $x_1, x_2 \in D(f)$: Ապացուցել, որ եթե $f(x_1)<f(x_2)$, ապա $x_1<x_2$:

Լուծում. Ենթադրենք հակառակը՝ այսինքն $f(x_1)<f(x_2)$, բայց $x_1 \ge x_2$: Քանի որ $f(x)$-ը աճող է, ապա $x_1 \ge x_2$ պայմանից կհետևեր, որ $f(x_1)\ge f(x_2)$, որը հակասում է $f(x_1)<f(x_2)$ պայմանին.

Ուստի մեր ենթադրությունը սխալ էր և $x_1 < x_2$:

Օրինակ 4 (9-րդ դաս N 252)

Դիցուք f և g ֆունկցիաները աճող են: Ապացուցել, որ

բ) $f+g$ ֆունկցիան աճող է:

Լուծում. Նշ. $D = D(f) \bigcap D(g)$ և $h(x) = f(x) + g(x)$

Դիցուք x_1 և $x_2 \in D$ և $x_1 < x_2$: Ցույց տանք, որ $h(x_1) < h(x_2)$:

Իրոք, քանի որ f-ը և g-ն աճող են, ապա $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ և $g(x_1) < g(x_2)$: Գումարելով վերջին երկու անհավասարությունները, կստանանք՝ $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$ կամ որ նույնն է՝ $h(x_1) < h(x_2)$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

դ) Եթե f-ը և g-ն չեն ընդունում բացասական արժեքներ, ապա $f \cdot g$ ֆունկցիան աճող է:

Լուծում. Ն շ $D = D(f) \bigcap D(g)$ և $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Դիցուք x_1 և $x_2 \in D$ և $x_1 < x_2$: Ցույց տանք, որ $h(x_1) < h(x_2)$

Իրոք, քանի որ f-ը և g-ն աճող են, ապա $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ և $g(x_1) < g(x_2)$

Քանի որ $f(x_1)$, $f(x_2)$, $g(x_1)$, $g(x_2)$-ը ոչ բացասական թվեր են, ապա, ըստ թվային անհավասարությունների հայտնի հատկության, վերջին երկու անհավասարությունները կարելի է բազմապատկել՝ $f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_1) \cdot g(x_2)$ կամ $h(x_1) < h(x_2)$ ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

զ) - f ֆունկցիան նվազող է:

Լուծում. Ն շ. $h(x) = -f(x)$: Դիցուք x_1 և $x_2 \in D(f)$ և $x_1 < x_2$: Ցույց տանք, որ $h(x_1) > h(x_2)$: Իրոք, քանի որ $f(x)$-ը աճող է, ապա $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$: Այս անհավասարության երկու մասը բազմապատկելով -1-ով, կստանանք՝ $-f(x_1) > -f(x_2)$ կամ $h(x_1) > h(x_2)$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

Օրինակ 5 (9-րդ 254). Ապացուցել, որ.

ա) $f(x) = x^4 + 3x$. ֆունկցիան $[0;+\infty)$-ում աճող է.

$f'(x) = 4x^3 + 3 > 0$, եթե $x \in [0;+\infty) \Rightarrow f(x)$-ը աճող է

բ) $f(x) = -x^3 - 2x$ նվազող է .

$f'(x) = -3x^2 - 2 < 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, այստեղից բխում է $f(x)$-ը նվազող է:

Օրինակ 6 Ապացուցել, որ ֆունկցիան նշված միջակայքում մոնոտոն է և նշել մոնոտոնության բնույթը.

9-րդ դաս. 289(բ) $f(x)=\sin(4x-x^2+2)$; $x\in[2;3]$

$$f'(x)=cos(4x-x^2+2)\cdot(4x-x^2+2)'=(4-2x)\cdot cos(4x-x^2+2)$$

Եթե $x\in[2;3]$, ապա $4-2x\le 0$, մնում է նշված x-երի համար պարզել $\cos(4x-x^2+2)$-ի նշանը: Նշ $t=4x-x^2+2$ և այս եռանդամից անջատենք լրիվ քառակուսի՝

$t=-(x^2-4x-2)=-(x^2-4x+4-6)=-((x-2)^2-6)=6-(x-2)^2$ ուստի $x\in[2;3]\Rightarrow t\in[5;6]$ որովհետև $\mathrm{x}=2$ դեպքում կստացվի t-ի մեծագույն արժեքը, իսկ $x=3$ դեպքում՝ փոքրագույն, և քանի որ $[5;6]$-ը պարունակվում է $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ միջակայքում, որտեղ $cos\,t>0$, ապա ստանում ենք, որ $f'(x)\le 0$ երբ $x\in[2;3]$, այսինքն ֆունկցիան նվազող է:

Դիտողություն. նկատենք, որ իրականում ստացվեց, որ $f'(x)<0$, երբ $x\in(2;3]$, իսկ $f'(2)=0$: Սակայն այստեղ և հետագայում մենք հաշվի կառնենք դասագրքում նշված հետևյալ փաստը՝ (առանց ամեն անգամ դա հատուկ նշելու) եթե տարրական ֆունկցիայի ածանցյալի նշանապահպանության միջակայքի ծայրակետը պատկանում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ապա այդ ծայրակետը նույնպես կպատկանի մոնոտոնության միջակայքին:

Այս օրինակը կարելի է լուծել նաև առանց ածանցյալի կիրառության

նշ. $t=4x-x^2+2\Rightarrow f(x)=sin\,t$

$4x-x^2+2$ եռանդամից անջատելով լրիվ քառակուսի՝

$$4x-x^2+2=-(x^2-4x-2)=-(x^2-4x+4-6)=6-(x-2)^2$$

տեսնում ենք, որ $x\in[2;3]\Rightarrow t\in[5;6]$, ընդ որում ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար, որոնք պատկանում են $[2;3]$ միջակայքին և x_1 < x_2, ապա $t_1=6-(x_1-2)^2>6-(x_2-2)^2=t_2$ և քանի որ t_1 և $t_2\in[5;6]$, իսկ $[5;6]$-ը պարունակվում է $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ միջակայքում որտեղ $sin\,t$-ն աճող է, ապա $sin\,t_1>sin\,t_2$; Վերջնականորեն ստացվեց, որ եթե $x_1,x_2\in[2;3]$ և $x_1<x_2$ ապա $sin(4x_1-x_1{}^2+2)>sin(4x_2-x_2{}^2+2)$, այսինքն $f(x)$-ը նվազող է $[2;3]$ միջակայքում:

9-րդ. 298(ա) $f(x)=ctg(x^2-2x-1)$ $x\in[1;2]$

$$f'(x)=-\frac{1}{sin^2(x^2-2x-1)}\cdot(2x-2)\le 0,$$

քանի որ $x \in [1;2] \Rightarrow 2x-2 \geq 0$, իսկ $-\dfrac{1}{sin^2(x^2-2x-1)} < 0$.

Պատ.՝ $f(x)$-ը նվազող է:

10-րդ 193. Ապացուցել, որ տրված ֆունկցիան նշված միջակայքում մոնոտոն է և նշել մոնոտոնության բնույթը.

բ) $f(x) = (1-x)\cdot \lg x + e^{-x}$, $(1;+\infty)$

$$f'(x) = (1-x)' \cdot lg\, x + (1-x)\cdot(lg\, x)' + (e^{-x})' = -lg\, x + (1-x)\cdot \frac{1}{x\, ln 10} - e^{-x} < 0$$

որովհետև $x > 1$ դեպքում $-lg\, x < 0$, $\dfrac{1-x}{x\, ln 10 < 0}$, $-e^{-x} < 0$, իսկ երեք բացասական թվերի գումարը բացասական է:

Պատ.՝ $f(x)$-ը նվազող է:

Դիտողություն Այս օրինակը կարելի էր լուծել նաև առանց ածանցյալի կիրառության. Գրելով $f(x) = -(x-1)\cdot lg\, x + \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ և հաշվի առնելով № 252 օրինակը, կստանանք՝ $(x-1)\cdot lg\, x$-ը աճող է, որպես երկու աճող դրական ֆունկցիաների արտադրյալ: Ուստի է -$(x-1)\cdot lg\, x$-ը նվազող է և քանի որ $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$-ը նվազող է, ապա $f(x)$-ը կլինի նվազող, որպես երկու նվազող ֆունկցիաների գումար:

գ) $f(x) = sin^2 x - 3 sin\, x + 4$; $[-1;1]$

$$f'(x) = 2 sin\, x(sin\, x)' - 3 cos\, x = 2 sin\, x\, cos\, x - 3 cos\, x = cos\, x(2 sin\, x - 3) < 0,$$

քանի որ $[-1;1]$ միջակայքը պարունակվում է $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$-ում, որտեղ $\cos x > 0$, իսկ $2 sin\, x - 3 < 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, որովհետև $sin\, x \leq 1$

Պատ.՝ $f(x)$ նվազող է

10-րդ 206. Ապացուցել ֆունկցիայի մոնոտոնությունը

բ) $f(x) = cos\, 2x - 2x$

Լուծում. $f'(x) = -sin\, 2x \cdot (2x)' - (2x)' = -2 sin\, 2x - 2 = -2(1 + sin\, 2x) \leq 0$

որովհետև $1 + sin\, 2x \geq 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար:

Պատ.՝ $f(x)$-ը նվազող է:

9-րդ 572. Ապացուցել, որ f ֆունկցիան նվազող է $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում.

ա) $f(x)=cos(sin x)$

Լուծում

$f'(x)=(cos(sin x))'=-sin(sin x)\cdot(sin x)'=-cos x\cdot sin(sin x)$

$\cos x\geq 0$, եթե $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, մնում է պարզել $sin(sin x)$-ի նշանը:

Նշ. $sin x=t$ քանի որ $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]\Rightarrow sin t\geq 0$, որովհետև $[0;1]$-ը պարունակվում է $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ում, այսպիսով $f'(x)\leq 0$, եթե $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, ուստի $f(x)$-ը նվազող է:

2-րդ լուծում. Նշ. $sin x=t\Rightarrow f(x)=cos t$

Դիցուք x_1 և x_2-ը $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ին պատկանող ցանկացած թվեր են ընդ որում $x_1<x_2$:

Քանի որ $sin x$-ը $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ում աճող է, ուստի $t_1=sin x_1<sin x_2=t_2$: Եվ քանի որ $t_1,t_2\in[0;1]$, իսկ $[0;1]$-ը պարունակվում է $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ում, որտեղ $cos t$-ն նվազող է, ապա $t_1<t_2$ պայմանից կհետևի որ $cos t_1<cos t_2$:

Վերջնականորեն ստացվեց, որ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)=cos t_1>cos t_2=f(x_2)$, այսինքն $f(x)$-ը նվազող է:

Օրինակ. Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը

10-րդ 198(բ)

բ) $f(x)=\frac{2}{x}+8x$

$D(f)=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+8$

$f'(x)\geq 0\quad \frac{-2+8x^2}{x^2}\geq 0....x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\bigcup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ հատելով այս բազմությունը $D(f)$-ի հետ կստանանք, որ $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ և $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$-ում $f(x)$-ը աճում է.

$f'(x)\le 0$ $\dfrac{8x^2-2}{x^2}\le 0.....\left[-\dfrac{1}{2};0\right)$ և $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$ նվազում է

Պատ.՝ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ և $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ աճում է

$\left[\dfrac{1}{2};0\right)$ և $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$ նվազում է

<u>Օրինակ</u>. (<u>9-րդ</u> դաս. 245(<u>ը</u>)) Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

$$f(x)=\frac{1}{|x-1|+1}$$

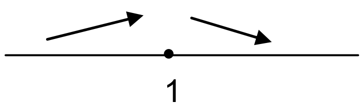
$D(f)=(-\infty;+\infty)$ որովհետև $|x-1|+1\neq 0$ x-ցանկացած արժեքի համար.

քննարկենք երկու դեպք՝ $x<1$ և $x>1$

1) եթե $x\in(-\infty;1)$, ապա $f(x)=\dfrac{1}{-(x-1)+1}=\dfrac{1}{2-x}$

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{2-x}\right)'=-\dfrac{1}{(2-x)^2}\cdot(2-x)'=\dfrac{1}{(2-x)^2}>0$, եթե $x\in(-\infty;1)$ ուստի $f(x)$-ը աճող է $(-\infty;1]$-ում, որովհետև $1\in D(f)$:

2) եթե $x\in(1;+\infty)$, ապա $f(x)=\dfrac{1}{x-1+1}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ եթե $x\in(1;+\infty)$ ուստի $f(x)$-ը նվազող է $[1;+\infty)$-ում.



Պատ.՝ $(-\infty;1]$ աճում է, $[1;+\infty)$ նվազում է,

$x=1$-ը $\max$-ի կետ է, $f_{\max}=\dfrac{1}{|1-1|+1}=1$

247(ե) $f(x)=4\cdot|x|-x^2$ (Գտնել f ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները)

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

Քննարկենք երկու դեպք՝ $x<0$, $x>0$

1) եթե $x\in(-\infty;0)$, ապա $f(x)=-4x-x^2\Rightarrow f'(x)=-4-2x$

$f'(x)=0$ $-4-2x=0$; $x=-2\in(-\infty;0)$

$f'(x)\ge 0$ $-4-2x\ge 0$, $x\le -2$: Հատելով սա $(-\infty;0)$-ի հետ կստանանք, որ $f(x)$ -ը $(-\infty;-2]$ $\nearrow$ աճում է:

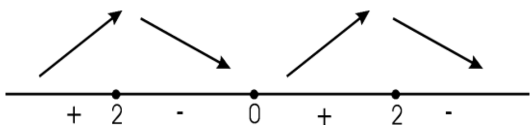
$f'(x)\le 0 \quad -4-2x\le 0 \quad x\ge -2$: Հատելով $(-\infty;0)$-ի հետ՝ կստանանք՝ $[-2;0]$ նվազում է (քանի որ $0\in D(f)$)

2) Եթե $x\in(0;+\infty)$, ապա $f(x)=4x-x^2 \Rightarrow f'(x)=4-2x$

$f'(x)=0$; $4-2x=0$; $x=2\in(0;\infty)$

$f'(x)\ge 0$ $4-2x\ge 0$; $x\le 2$; Հատելով $(0;+\infty)$-ի հետ՝ կստանանք՝ $[0;2]$ աճում է

$f'(x)\le 0 \quad 4-2x\le 0$; $x\ge 2$;Հատելով $(0;+\infty)$-ի հետ՝ կստանանք՝ $[2;+\infty)$ նվազում է. Վերջնականորեն ստացվում է՝



Պատ.՝ $(-\infty;-2]$ և $[0;2]$ աճում է,
$[-2;0]$ և $[2;+\infty)$ նվազում է
$x=-2$-ը և $x=2$-ը $\max$-ի կետեր են, $x=0$-ն՝ $\min$-ի կետ:

Մեծագույն արժեքը ստացվում է $x=-2$ կամ $x=2$ կետում և հավասար է՝ $4\cdot|-2|-(-2)^2=8-4=4$, փոքրագույն արժեք չունի որովհետև x^2 -ու գործակիցը հավասար է $-1<0$ և հետևաբար $f(x)$-ը ներքևից սահմանափակ չէ, օրինակ
$(0;+\infty)$-ում:

Օրինակ 2 (9-րդ դաս 285բ). Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները: $y=2\sin^2 x-3\sin x-5$

Լուծում նշ. $\sin x=t \Rightarrow t\in[-1;1]$ և պետք է գտնել $f(t)=2t^2-3t-5$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $t\in[-1;1]$ միջակայքում:

$$f'(t)=4t-3;\ 4t-3=0;\ t=\frac{3}{4}\in[-1;1]$$

$$f(-1)=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-5=2+3-5=0;$$

$$f(1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1-5=2-3-5=-6;$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\cdot\frac{3}{4}-5=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}-5=\frac{9-18-40}{8}=-\frac{49}{8}:$$

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը՝ 0

փոքրագույն արժեքը՝ $-\dfrac{49}{8}$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (9-րդ. 211(գ))

ա) $y=2x^2+6x-4$

անջատենք լրիվ քառակուսի՝

$$y=2(x^2+3x-2)=2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\right)=$$

$$=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\right)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{2}:$$

Պարզ է, որ ստացված արտահայտությունը փոքրագույն արժեքը կստանա $x=-\frac{3}{2}$ դեպքում և այդ արժեքը հավասար է $2\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{2}=-\frac{17}{2}$, իսկ մեծագույն արժեք չունի, որովհետև x^2-ու գործակիցը դրական է

Պատ.՝ մեծագույն արժեք չունի,

փոքրագույն արժեքը՝ $-\frac{17}{2}$:

զ) $y=\sqrt{7x-10-x^2}$ թ.ա.բ. $7x-10-x^2\geq 0$

$x^2-7x+10\leq 0...\ \ x\in[2;5]$:

Այսպիսով, պետք է գտնել $\sqrt{7x-10-x^2}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[2;5]$ միջակայքում. դա կարելի է անել կամ ստանդարտ ձևով (ածանցյալի օգնությամբ) կամ տվյալ օրինակում եռանդամից լրիվ քառակուսի անջատելով՝

$$7x-10-x^2=-(x^2-7x+10)=-\left(x^2-2\cdot\frac{7}{2}^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+10\right)=$$

$$=\left(\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$$

այսպիսով $y=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}$

Պարզ է, որ y -ըմեծագույն արժեք կընդունի $x=\frac{7}{2}$ դեպքում և այդ արժեքը հավասար է $\sqrt{\frac{9}{4}-\left(\frac{7}{2}-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$, իսկ փոքրագույն արժեքը կստացվի $x=2$ կամ $x=5$ դեպքում և այդ արժեքը հավասար է $\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}=0$

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը՝ $\frac{3}{2}$

փոքրագույն արժեքը՝ 0

9-րդ 573(բ):

$$y = sin^2 x + cos 2x$$

Լուծում $y = sin^2 x + cos^2 x - sin^2 x = cos^2 x$

Պարզ է, որ y-ը մեծագույն արժեք կստանա, երբ $cos x = \pm 1$ և այն հավասար կլինի 1-ի, իսկ y-ի փոքրագույն արժեքը կստացվի $cos x = 0$ դեպքում և այն հավասար կլինի՝ 0 :

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը 1 է,
փոքրագույն արժեքը 0:

574(բ) $y = sin x + 2cos x$

Լուծում $y = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} sin x + \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} cos x \right) =$ նշ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = cos\,\alpha \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = sin\,\alpha$$

$$= \sqrt{5} \cdot (cos\,\alpha \cdot sin x + sin\,\alpha \cdot cos x) = \sqrt{5} \cdot sin(x + \alpha)$$

Պարզ է, որ y-ը մեծագույն արժեք կստանա, երբ $sin(x + \alpha) = 1$ և այն հավասար կլինի $\sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$, իսկ y-ի փոքրագույն արժեքը կստացվի $sin(x + \alpha) = -1$ դեպքում և այն հավասար կլինի $\sqrt{5} \cdot (-1) = -\sqrt{5}$

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը $\sqrt{5}$
փոքրագույն արժեքը $-\sqrt{5}$:

9-րդ դաս. 283 Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները

ա) $y = sin\left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

Օգտվենք այն փաստից, որ $sin x$-ի էքստրեմումի կետերը այն կետերն են, որտեղ նա ընդունում է 1 և -1 արժեքները, այսինքն մեր դեպքում պետք է լուծել (1) $sin\left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ և (2) $sin\left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$ հավասարումները

(1) $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (2) $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad n \in Z \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

Պատ.՝ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\max$-ի կետեր են՝ $y_{\max} = 1$

$$x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in Z \ \ \max \text{-ի կետեր են՝ } y_{\max}=-1$$

գ) $f(x)=1-sin\,x$

Պարզ է, որ $sin\,x$ ֆունկցիայի $\max$-ի կետերը՝ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ կետերը կհանդիսանան $-sin\,x$ ֆունկցիայի $\min$-ի կետեր, իսկ $\sin x$-ի $\min$-ի կետերը՝ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ կետերը՝ $-sin\,x$-ի $\max$-ի կետեր:

Պատ.՝ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ $\min$-ի կետեր են՝ $f_{\min}=1-1=0$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ $\max$-ի կետեր են՝ $f_{\max}=1+1=2$

գ) $y=2-sin^2\,x$

Լուծում, Պարզ է, որ y-ը մեծագույն արժեք կընդունի, եթե $sin\,x=0\Rightarrow x=\pi n$, իսկ y-ի փոքրագույն արժեքը կստացվի $sin^2\,x=1$ դեպքում: $1-sin^2\,x=0$, $cos\,x=0,$ $cos^2\,x=0, x=\frac{\pi}{2}+\pi n$,

Պատ.՝ $x=\pi n$, $n\in Z$ $\max$-ի կետեր են՝ $y_{\max}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=2$

$2x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ $\min$-ի կետեր են՝ $y_{\min}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1=2$

10-րդ դաս. 222. Ցույց տալ, որ ֆունկցիան էքստրեմումի կետեր չունի.

բ) $f(x)=x^3-3x^2+3x$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2\geq 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, այստեղից էլ բխում է, որ $f(x)$-ը աճող է $(-\infty;+\infty)$-ում և այդ պատճառով էքստրեմումի կետեր չունի:

դ) $f(x)=cos\,x-x$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

$f'(x)=-sin\,x-1\leq 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, այստեղից էլ բխում է, որ $f(x)$-ը նվազող է $(-\infty;+\infty)$-ում և այդ պատճառով էքստրեմումի կետեր չունի:

Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման և մոնոտոնության միջակայքերը՝

569(ա). $y = 2\,sin(x - \frac{\pi}{4})$

հաշվի առնելով, որ $\sin x$-ը աճող է $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ $k \in Z$ միջակայքերում, կստանանք, որ y-ը աճող է, երբ $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, այսինքն՝

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$$

Նույն ձևով y-ը կլինի նվազող, եթե $x - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$ այսինքն՝

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

Քանի որ $\sin x > 0$, երբ $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, ապա y-ը կլինի դրական, երբ $x - \frac{\pi}{4} \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, այսինքն՝

$$2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

Նույն ձևով, y-ը կլինի բացասական, եթե $x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\pi + 2\pi k, 2\pi k\right)$,

$$-\pi + 2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < 2\pi k \Rightarrow \frac{-3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Պատ.՝ y-ը աճող է, երբ $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$

y-ը նվազող է, երբ $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$

$y > 0$, երբ $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$

$y < 0$, երբ $x \in \left(\frac{-3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$

<u>519 բ)</u> $y = 2\,cos\,3x - 5$

Հաշվի առնելով, որ $cos\,x$-ը աճող է $\left[-\pi + 2\pi; 2\pi k\right], k \in Z$ միջակայքերում, կստանանք, որ y-ը աճող է, երբ $3x \in \left[-\pi + 2\pi; 2\pi k\right]$, այսինքն՝

$$-\pi + 2\pi k \le 3x \le 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \le x \le \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$$

Նույն ձևով, y-ը կլինի նվազող, եթե $3x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$,

այսինքն $2\pi k \le 3x \le \pi + 2\pi k \Rightarrow \frac{2\pi k}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$

Քանի որ $2cos3x - 5 \le 2 \cdot 1 - 5 = -3 < 0$, ապա $y < 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար.

Պատ.՝ y-ը աճող է, երբ $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$

y-ը նվազող է, երբ $x \in \left[\frac{3\pi k}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$

$y < 0$, երբ $x \in (-\infty; +\infty)$

570 գ $y = 5^{|x|+1} - 25$

եթե $x \ge 0$, ապա, $y = 5^{x+1} - 25 = 5 \cdot 5^x - 25$ և քանի որ $5 > 1$, ապա y-ը աճող է $[0; +\infty)$-ում

եթե $x \le 0$, ապա $y = 5^{-x+1} - 25 = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 25$ և քանի որ $\frac{1}{5} < 1$, ապա՝ y-ը նվազող է $(-\infty; 0]$-ում:

Նշանապահպանման միջակայքերը գտնելու համար պետք է լուծել $y > 0$ և $y < 0$ անհավասարությունները՝

$5^{|x|+1} - 25 > 0 \Leftrightarrow 5^{|x|+1} > 5^2 \Leftrightarrow |x| + 1 > 2 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$5^{|x|+1} - 25 < 0 \Leftrightarrow 5^{|x|+1} < 5^2$; $|x| < 1$; $x \in (-1; 1)$

Պատ. y-ը աճում է $[0; +\infty)$-ում

y-ը նվազում է $(-\infty; 0]$-ում,

$y > 0$, երբ $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$y < 0$, երբ $x \in (-1; 1)$

571 բ) $y = log_{0,1}(2|x| - 7)$

Նախ գտնենք որոշման տիրույթը՝ $2|x| - 7 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3,5) \cup (3,5; +\infty)$

եթե $x \in (-\infty; -3,5)$, ապա

$$y = log_{0,1}(-2x - 7) \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot (-2x - 7)'}{(-2x - 7) \cdot ln\,0,1} = \frac{2}{(2x + 7) \cdot ln\,0,1}:$$

Քանի որ $ln\,0,1 < 0$ և $2x + 7 < 0$ (որովհետև $x < -3,5$), ապա $y' > 0$, ուստի $(-\infty; -3,5)$-ում y-ը աճող է: Եթե $x \in (3,5; +\infty)$, ապա

$y = log_{0,1}(2x-7) \Rightarrow y' = \dfrac{1 \cdot (2x-7)'}{(2x-7) \cdot ln\,0,1} = \dfrac{2}{(2x-7) \cdot ln\,0,1}$ և քանի որ $2x-7>0$ (որովհետև $x>3,5$), ապա $y'<0$, ուստի ($3,5;+\infty$)-ում, y -ը նվազող է: Նշանապահպանման միջակայքերը գտնելու համար պետք է լուծել $y>0$ և $y<0$ անհավասարությունները՝

$$log_{0,1}(2|x|-7)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x|-7>0 \\ 2\cdot|x|-7<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|>\dfrac{7}{2} \\ |x|<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty;-\dfrac{7}{2}\right) \cup \left(\dfrac{7}{2};+\infty\right) \\ x \in (-4;4) \end{cases}$$

$$x \in \left(-4;-\frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2};4\right)$$

$$log_{0,1}(2|x|-7)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x|-7>0 \\ 2\cdot|x|-7>1 \end{cases} \begin{cases} |x|>\dfrac{7}{2} \\ |x|>4... \end{cases} \quad x \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$$

Պատ.՝ y -ը աճում է $(-\infty;-3,5)$-ում

y -ը նվազող է $(3,5;+\infty)$-ում,

$y>0$, երբ $x \in (-4;-3,5) \cup (3,5;4)$

$y<0$, երբ $x \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$

<u>Ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկությունը կարող է օգտակար լինել որոշ տիպի հավասարումների և անհավասարումների լուծման համար ինչպես նաև ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները գտնելու խնդիրներում:</u>

Օրինակ. <u>10րդ</u> <u>256(գ)</u> Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$ln(1+x)<x, \quad x \in (0;+\infty)$$

<u>Լուծում</u> Դիտարկենք $f(x)=ln(1+x)-x$ ֆունկցիան $x \in (0;+\infty)$ -ում

$$f(0)=ln(1+0)-0=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'-1=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1-(1+x)}{1+x}=\frac{-x}{1+x}<0, \text{ եթե } x>0$$

ուրեմն $f(x)$-ը նվազող է $(0;+\infty)$-ում, ուստի $x>0 \Rightarrow f(x)<f(0)$, այսինքն $ln(1+x)-x<0 \Rightarrow ln(1+x)<x$, ինչ և պետք էր ապացուցել

<u>Օրինակ. 209(բ)</u> Ապացուցել, որ տրված հավասարումը նշված J միջակայքում ունի մեկ արմատ.

(1) $x^4-4x-9=0$; $J=[2;3]$

<u>Լուծում</u>. Նշ. $f(x)=x^2-4x-9$ Հաշվենք $f(x)$-ի արժեքները J միջակայքի ծայրակետերում՝

$$f(2) = 2^4 - 4\cdot 2 - 9 = 16 - 17 < 0,$$
$$f(3) = 3^4 - 4\cdot 3 - 9 = 81 - 21 > 0$$

Քանի որ $f(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է և $[2;3]$ միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա այդ միջակայքի գոնե մի կետում դառնում է 0, այսինքն գոյություն ունի $x_0 \in (2;3)$ կետ, որ $f(x_0) = 0$, այստեղից բխում է,որ x_0-ն (1) հավասարման արմատ է: Մնում է ցույց տալ, որ $[2;3]$ միջակայքում (1)-ը այլ արմատներ չունի:

$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) > 0$, եթե $x \in [2;3] \Rightarrow f(x)$-ը աճող է $[2;3]$ միջակայքում, իսկ աճող ֆունկցիան իր յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է միայն մի կետում և քանի որ $f(x_0) = 0$, ապա $[2;3]$ միջակայքում չկա ուրիշ կետ, որտեղ $f(x) = 0$, ինչ և պետք էր ապացուցել:

9-րդ դաս. 371

Ցույց տալ, որ հավասարումների լուծումները տրված թվերն են.

ա) $x^{10} + x^4 = 2$, $x = \pm 1$

Դրա համար նախ պետք է ստուգել, որ ± 1 թվերը բավարարում են նշված հավասարմանը և այնուհետև պետք է ապացուցել, որ բացի այդ թվերից հավասարումն ուրիշ լուծումներ չունի.

Եթե $x = 1$, $1^{10} + 1^4 = 1 + 1 = 2$

Եթե $x = -1$, $(-1)^{10} + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$

Մնում է ցույց տալ, որ $(-\infty;-1)$, (-1; 1) և $(1;+\infty)$ միջակայքերում հավասարումը լուծում չունի.

եթե $x < -1$ կամ $x > 1$, ապա քանի որ $y = x^{10}$ և $y = x^4$ ֆունկցիաները աճող են $[0;+\infty)$ -ում և նվազող՝ $(-\infty;0]$-ում, $x^{10} > 1$ և $x^4 > 1$: Գումարելով վերջին երկու անհավասարությունները կստանանք՝ $x^{10} + x^4 > 1 + 1 \Rightarrow x^{10} + x^4 > 2$, այսինքն $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ -ում հավասարումը լուծում չունի.

Եթե $x \in (-1;1)$; ապա վերը նշված պատճառով $x^{10} < 1$ և

$x^4 < 1 \Rightarrow x^{10} + x^4 < 1 + 1$, $x^{10} + x^4 < 2 \Rightarrow$(-1; 1)-ում նույնպես լուծում չկա:

դ) $2x^5 + 3x^3 = 88$, $x = 2$

եթե $x = 2$,ապա $2\cdot 2^5 + 3\cdot 2^3 = 64 + 24 = 88$

եթե $x < 2$, ապա քանի որ $y = x^5$ և $y = x^3$ աճող են $(-\infty : +\infty)$-ում, կստանանք

$$\begin{matrix} x^5 < 2^5 \\ x^3 < 2^3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x^5 < 2\cdot 2^5 \\ 3x^3 < 3\cdot 2^3 \end{matrix} \Rightarrow 2x^5 + 3x^3 < 2\cdot 2^5 + 3\cdot 2^3 \Rightarrow 2x^5 + 3x^3 < 88,$$

այսինքն $(-\infty;2)$-ում հավասարումը լուծում չունի:

եթե $x>2$, ապա $\begin{matrix} x^5 > 2^5 \\ x^3 > 2^3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x^5 > 2\cdot 2^5 \\ 3x^3 > 3\cdot 2^3 \end{matrix} \Rightarrow 2x^5+3x^3 > 2\cdot 2^5 + 3\cdot 2^3$

$\Rightarrow 2x^5+3x^3>88 \Rightarrow (2;+\infty)$-ում նույնպես լուծում չկա:

(9-րդ դաս. 407(գ))

Ցույց տալ, որ $\left(\sqrt{5}\right)^{-x}-1=0{,}3x$ (1) հավասարման լուծումն է՝ $x=0$-ն:

Նախ ստուգենք, որ $x=0$-ն բավարարում է հավասարմանը՝

$\left(\sqrt{5}\right)^{0}-1=1-1=0$ և $0{,}3\cdot 0=0$

Մնում է ցույց տալ, որ $(-\infty;0)$ և $(0;+\infty)$ միջակայքերում հավասարումը լուծում չունի: Նախ (1)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝ $\left(\sqrt{5}\right)^{-x}=1+0{,}3x$

Եթե $x>0$, ապա $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{x}<\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{0}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{x}<1$, քանի որ $\frac{1}{\sqrt{5}}<1\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{x}$-ը նվազող է իսկ $1+0{,}3x>1$

Իսկ եթե $x<0$, ապա $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{x}>1$, իսկ $1+0{,}3x<1$

Այսպիսով (1)-ը հնարավոր է միայն $x=0$ դեպքում և ապացույցն ավարտված է:
օրինակ (9-րդ դաս. 494դ)

Ցույց տալ, որ հավասարման լուծումը տրված թիվն է.

(1) $log_{\frac{1}{3}}(x+3)=5^x-2$, $x=0$

Նախ ստուգենք, որ $x=0$-ն բավարարում է հավասարմանը՝

$log_{\frac{1}{3}}(0+3)=log_{\frac{1}{3}}3=-1$ և $5^0-2=-1$

Քանի որ $log_{\frac{1}{3}}(x+3)$-ի որոշման տիրույթն է՝ $x>-3$, ապա մնում է ապացուցել, որ (-3; 0) և (0;+∞) միջակայքերում հավասարումը լուծում չունի:

Եթե $-3<x<0$, ապա $log_{\frac{1}{3}}(x+3)>log_{\frac{1}{3}}(0+3)$, որովհետև $log_{\frac{1}{3}}(x+3)$-ը նվազող է ($\frac{1}{3}<1$ պատճառով) այսինքն $log_{\frac{1}{3}}(x+3)>-1$ իսկ $5^x<5^0\Rightarrow 5^x<1$, որովհետև 5^x-ը աճող է ($5>1$ պատճառով): $5^x<1$ անհավասարության երկու կողմերին գումարելով -2 կստանանք՝

$5^x-2<1-2\Rightarrow 5^x-2<-1$

Այսպիսով, ստացվեց, որ $x\in(-3;0)$ դեպքում (1) –ի ձախ մասը մեծ է -1-ից, իսկ աջ մասը փոքր է -1-ից, այսինքն (-3;0) միջակայքում հավասարումը լուծում չունի:

Եթե $x>0$, ապա վերը նշված պատճառով

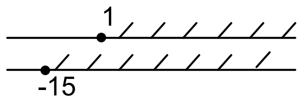
$log_{\frac{1}{3}}(x+3)<log_{\frac{1}{3}}(0+3)\Rightarrow log_{\frac{1}{3}}(x+3)<-1$,

իսկ $5^x-2>5^0-2\Rightarrow 5^x-2>-1$, այսինքն $(0;+\infty)$ միջակայքում նույնպես հավասարումը լուծում չունի և ապացույցն ավարտված է:

<u>10-րդ</u> 277 (բ,գ,դ) Ապացուցել, որ հավասարումն արմատ չունի.

բ) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}=4-x^2$

թ.ա.բ.՝ $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x+15\geq 0 \end{cases}$



$x\in[1;+\infty)$

Քանի որ $\sqrt{x}$-ը աճող ֆունկցիա է, ապա $x\geq 1$ դեպքում հավասարման ձախ մասի փոքրագույն արժեքը կստացվի $x=1$ դեպքում և հավասար կլինի $\sqrt{1-1}+\sqrt{1+15}=4$,

իսկ աջ մասի մեծագույն արժեքը $x\geq 1$ դեպքում կլինի $4-1^2=3$ ուստի x-ի ցանկացած արժեքի համար $[1;+\infty)$ միջակայքից $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}>4-x^2$ այստեղից էլ բխում է որ հավասարումը լուծում չունի:

գ) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=2\sqrt[4]{x^2-4}$

$$\left(\sqrt[4]{x+2}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x-2}\right)^2-2\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}=0$$

$$\left(\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{x-2}\right)^2=0$$

$$\sqrt[4]{x+2}=\sqrt[4]{x-2}\Rightarrow x+2=x-2;\ 0\cdot x=-4\quad \phi$$

դ) $\sqrt[6]{1-x}=\sqrt[3]{x-2}$ թար $1-x\geq 0\Rightarrow x\leq 1$

$x\leq 1$ դեպքում $\sqrt[6]{1-x}\geq 0$, իսկ $\sqrt[3]{x-2}<0$ այստեղից բխում է որ հավասաումը լուծում չունի:

<u>10-րդ</u> 278 Ապացուցել, որ հավասարման արմատները նշված թվերն են

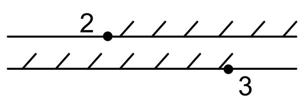
ա) (1) $\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1;\ x_1=2;\ x_2=3$

Նախ ստուգենք, որ այդ թվերը բավարարում են հավասարմանը՝

$x=2$ դեպքում $\sqrt{2-2}+\sqrt[4]{3-2}=0+1=1$

$x=3$ դեպքում $\sqrt{3-2}+\sqrt[4]{3-3}=1+0=1$

Գտնենք թ.ա,բ.-ը՝ $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 3-2\geq 0 \end{cases}\begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 3 \end{cases}$



$x\in[2;3]$

Այսպիսով, պետք է ցույց տալ, որ $(2;3)$ միջակայքում (1)-ը լուծում չունի: Օգտվենք հետևյալ փաստից՝ եթե $0<a<1$, ապա ցանկացած n բնական թվի համար ($n \geq 2$) $\sqrt[n]{a} > a$. Իրոք, հակառակ դեպքում, այսինքն եթե $\sqrt[n]{a} \leq a$, ապա $a \leq a^n \Rightarrow a(1-a^{n-1}) \leq 0$, որը հնարավոր չէ, որովհետև $a \in (0;1) \Rightarrow a^{n-1} < 1$:

Մեր օրինակում, քանի որ $x \in (2,3)$ ապա $0 < x-2 < 1$ և $0 < 3-x < 1$ $\Rightarrow \sqrt{x-2} > x-2$ և $\sqrt[4]{3-x} > 3-x$ գումարելով այս երկու անհավասարությունները, կստանանք՝ $\sqrt{x-2} + \sqrt[4]{3-x} > x-2+3-x \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{3-x} > 1$, այսինքն $x \in (2;3)$ դեպքում (1) հավասարման ձախ մասը մեծ է 1-ից, ուստի այդ միջակայքում հավասարումը լուծում չունի:

<u>278(բ)</u> (1) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt[4]{16+|x|}$, $x = 0$

Ստուգենք որ $x = 0$-ն բավարարում է հավասարմանը՝

երբ $x = 0$ $\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0} = 1+1 = 2$, $\sqrt[4]{16+|0|} = \sqrt[4]{16} = 2$

Գտնենք թ.ա,ք,-ը՝ $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 16+|x| \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x \in (-\infty;\infty) \end{cases}$ $x \in [-1;1]$

Այսպիսով, մնում է ցույց տալ, որ $[-1;0) \cup (0;1]$ բազմության ոչ մի կետ (1) հավասարման լուծում չէ:

Քանի որ (1)-ի երկու մասն էլ ոչ բացասական են, ապա բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք նրան համարժեք հավասարում՝

$$1+x+2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}+1-x = \sqrt{16+|x|}$$

$$2+2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{16+|x|}$$

քանի որ $x \in [-1;1]$ և $x \neq 0$, ապա հաշվի առնելով, որ $y = \sqrt{x}$-ը աճող է $[0:+\infty)$-ում՝ $2+2\sqrt{1-x^2} < 2+2\sqrt{1-0^2} = 4$, իսկ աջ մասը՝ $\sqrt{16+|x|} > \sqrt{16+0} = 4,$ այսինքն (1)-ը $[-1;0) \cup (0;1]$ բազմության վրա լուծում չունի:

278 գ. (1) $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x-2} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x = 2$

Ստուգենք, որ $x = 2$-ը բավարարում է հավասարմանը՝

երբ $x = 2$ $\sqrt{2^2 \cdot 4 \cdot 2+5} + \sqrt{2-2} = 1+0 = 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2-1}} = \dfrac{1}{1} = 1$

Գտնենք թ.ա.ք.-ը $\begin{cases} x^2-4x+5 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ $\dots$ $x \in [2;+\infty)$

Մնում է ցույց տալ, որ $x > 2$ դեպքում (1)-ը լուծում չունի:

$x^2 - 4x + 5$ եռանդամից անջատենք լրիվ քառակուսի՝

$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow$ (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sqrt{(x-2)^2 + 1} + \sqrt{x-2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

քանի որ $x > 2$, ապա հաշվի առնելով որ $y = \sqrt{x}$-ը աճող է $[0 : +\infty)$-ում, կստանանք որ ձախ մասը՝ $\sqrt{(x-2)^2 + 1} + \sqrt{x-2} > \sqrt{(2-2)^2 + 1} + \sqrt{2-2} = 1$

իսկ աջ մասը՝ $\frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$, այսինքն $x > 2$ դեպքում (1) հավասարման ձախ մասը մեծ է աջ մասից և հետևաբար հավասարումն $(2;+\infty)$ միջակայքում արմատ չունի:

10-րդ 324(բ) գտնել ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը.

$$f(x) = 2^{10x - x^2 - 21} + \frac{1}{2 + 3|x-5|}$$

Նախ $10x - x^2 - 21$ եռանդամից առանձնացնենք լրիվ քառակուսի՝

$10x - x^2 - 21 = -(x^2 - 10x + 21) = -(x^2 - 10x + 25 - 4) = -((x-5)^2 - 4) =$

$= 4 - (x-5)^2,$

ուստի $f(x) = 2^{4-(x-5)^2} + \frac{1}{2 + 3|x-5|}$

Պարզ է, որ $f(x)$-ը մեծագույն արժեք կստանա $x = 5$ դեպքում, որովհետև քանի որ 2^x-ը աճող է, ապա $4 - (x-5)^2 \le 4 - (5-5)^2 \Rightarrow 2^{4-(x-5)^2} \le 2^4$, իսկ

$$2 + 3|x-5| \ge 2 + 3|5-5| \Rightarrow \frac{1}{2 + 3|x-5|} \le \frac{1}{2 + 3|5-5|}$$

Պատ՝ $f(x)$-ի մեծագույն արժեքը հավասար է՝

$$2^{4-(5-5)^2} + \frac{1}{2 + 3|5-5|} = 16 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}$$

325(բ) Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2 - 7} - |x-4|$$

Նախ գտնենք որոշման տիրույթը՝ $8x - x^2 - 7 \ge 0$

$$x^2 - 8x + 7 \le 0$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 7\ ;\ x \in [1;7]$$

$8x - x^2 - 7$ եռանդամից առանձնացնենք լրիվ քառակուսի՝

$$8x - x^2 - 7 = -(x^2 - 8x + 7) =$$
$$= -(x^2 - 8x + 16 - 16 + 7) = -((x-4)^2 - 9) = 9 - (x-4)^2 :$$

Ուստի $f(x) = \sqrt{9-(x-4)^2} - |x-4|,$

քանի որ $y = \sqrt{x}$ -ը աճող ֆունկցիա է $[0;+\infty)$-ում և $|x-4| \geq 0,$ ապա պարզ է, որ $f(x)$ -ը մեծագույն արժեք կստանա $x = 4$ դեպքում և այդ արժեքը հավասար է

$$\sqrt{9-(4-4)^2} - |4-4| = 3$$

Իսկ $f(x)$ -ի փոքրագույն արժեքը $[1;7]$ միջակայքում կստացվի $x = 1$ կամ $x = 7$ դեպքում և այն հավասար է՝ $\sqrt{9-3^2} - |3| = -3$

Պատ՝ մեծագույն արժեքը 3 է
փոքրագույն արժեքը՝ -3:

9-րդ 213 բ) $y = cos\,\pi x + \sqrt{1-2|x|}$

Այս ֆունկցիան որոշված է $1 - 2|x| \geq 0$ դեպքում, այսինքն $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Նշված x -երի համար $cos\,\pi x$ -ը և $\sqrt{1-2|x|}$. մեծագույն արժեք կստանան $x = 0$ դեպքում և այդ արժեքը կլինի $cos\,\pi \cdot 0 + \sqrt{1-2-0} = 1+1 = 2$, որովհետև $cos\,\pi x \leq 1$ և $\sqrt{1-2\cdot|x|} \leq 1$

Իսկ փոքրագույն արժեքը $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ միջակայքին պատկանող x -երի համար կստացվի $x = \frac{1}{2}$ կամ $x = -\frac{1}{2}$ դեպքում և հավասար կլինի $cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-2\cdot\frac{1}{2}} = 0+0$,որովհետև այդ միջակայքի մնացած x -երի համար և $cos\,\pi x > 0$ և $\sqrt{1-2|x|} > 0$ (քանի որ $\sqrt{x}$ -ը աճող է $[0;+\infty)$-ում)

Պատ՝ մեծագուն արժեքը =2
փոքրագույն արժեքը =0

գ) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10} + 2|x-3|$

Այս ֆունկցիան որոշված է x-ի ցանկացած արժեքի համար, որովհետև $x^2 - 6x + 10 \geq 0$ -ի լուծումների բազմությունը ($-\infty;+\infty$)-ն է.

Քանի որ $x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$, ապա

$y=\sqrt{(x-3)^2+1}+2|x-3|$

Պարզ է, որ այս ֆունկցիան փոքրագույն արժեք կստանա $x=3$ դեպքում և այդ արժեքը հավասար է $\sqrt{(3-3)^2+1}+2\cdot|3-3|=1+0=1$, որովհետև 3-ից տարբեր x-ի ցանկացած արժեքի համար $\sqrt{(x-3)^2+1}>1$, քանի որ $\sqrt{x}$-ը աճող է և $2|x-3|>0$

Իսկ մեծագույն արժեք ֆունկցիան չունի, որովհետև և առաջին և երկրորդ գումարելիները կարող են ընդունել 0-ից մեծ ցանկացած արժեքներ:

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը =1
փոքրագույն արժեք չունի.

212 (գ) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|+4}}+\frac{1}{2}$

Քանի որ $y=\sqrt{x}$-ը աճող ֆունկցիա է $x\in[0;+\infty)$-ում, ապա պարզ է, որ y-ի մեծագույն արժեքը կստացվի $x=0$ դեպքում, երբ առաջին կոտորակի հայտարարը ընդունում է փոքրագույն արժեք, ընդ որում y-ի մեծագույն արժեքը հավասար է $\frac{1}{\sqrt{|0|+4}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Ֆունկցիան փոքրագույն արժեք չունի, որովհետև նա ընդունում է $\frac{1}{2}$-ից մեծ և 1-ը չգերազանցող ցանկացած արժեք, իսկ $\frac{1}{2}$ արժեք չի ընդունում x-ի ցանկացած արժեքի համար:

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը =1
փոքրագույն արժեք չունի.

Լուծել հավասարումը, նախօրոք գտնելով նրա ձախ և աջ մասերի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

345. ա) $\sqrt{1-x^2}=1+\sin^2 x$ թ.ա.բ $1-x^2\geq 0\Rightarrow x\in[-1;1]$

Քանի որ $y=\sqrt{x}$-ը աճող ֆունկցիա է $x\in[0;+\infty)$-ում, ձախ մասի մեծագույն արժեքը ստացվում է $x=0$ դեպքում և հավասար է 1, որովհետև $1-x^2\leq 1-0^2=1,$ իսկ աջ մասի փոքրագույն արժեքն է հավասար 1, որովհետև $1+sin^2 x\geq 1,$ x-ի ցանկացած արժեքի համար այնպես, որ միայն $x=0$ դեպքում են ձախ և աջ մասերը իրար հավասար, որովհետև $sin 0=0$, իսկ x-ի մնացած բոլոր արժեքների համար $[-1;1]$ միջակայքից $\sqrt{1-x^2}<1$:

Պատ.՝ $x=0$

346բ) $2^{x^2-8x+17}=\frac{6}{3+|x-4|}$

Նախ $x^2-8x+17$ եռանդամից առանձնացնենք լրիվ քառակուսի՝

$x^2-8x+17=x^2-8x+16+1=(x-4)^2+1$ ուստի՝ (1) –ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $2^{(x-4)^2+1}=\dfrac{6}{3+|x-4|}$

Քանի որ $y=2^x$-ը աճող ֆունկցիա է, ապա ձախ մասի փոքրագույն արժեքը կստացվի $x=4$ դեպքում և այն հավասար է $2^{(4-4)^2+1}=2$, իսկ աջ մասում հայտարարը ընդունում է փոքրագույն արժեք $x=4$ դեպքում, ուստի աջ մասի մեծագույն արժեքը ստացվում է $x=4$ դեպքում և հավասար է $\dfrac{6}{3-|4-4|}=2$;

Այսպիսով, միայն $x=4$ դեպքում են ձախ և աջ մասերը հավասար, որովհետև $x\neq 4$ դեպքում $2^{(x-4)^2+1}>2$ իսկ $\dfrac{6}{3+|x-4|}<2$;

Պատ.՝ $x=4$

Լուծել անհավասարումը, նախօրոք գտնելով նրա ձախ և աջ մասերի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները:

10-րդ 353(բ) և 354(ա):

<u>353(բ)</u> $\sqrt{1+x^2}\leq cos\,2x$

Քանի որ $y=\sqrt{x}$-ը աճող ֆունկցիա է $x\in[0;+\infty)$-ում, ապա ձախ մասի փոքրագույն արժեքը ստացվում է $x=0$ դեպքում և հավասար է 1, իսկ աջ մասը $x=0$ դեպքում ստանում է իր մեծագույն արժեքը՝ $cos\,0=1$ այսինքն անհավասարմանը բավարարում է միայն $x=0$ թիվը, որովհետև $x\neq 0$ դեպքում $\sqrt{1+x^2}>1$, $cos\,2x\leq 1$

Պատ.՝ $x=0$

354(ա) $lg(6x-x^2-8)\geq|x-3|$ թաք $\begin{matrix}6x-x^2-8>0\\ x^2-6x+8<0\Rightarrow x\in(2;4)\end{matrix}$

$6x-x^2-8$ եռանդամից առանձնացնելով լրիվ քառակուսի, կստանանք

$6x-x^2-8=-(x^2-6x+8)=-(x^2-6x+9-1)=-((x-3)^2-1)=1-(x-3)^2$

$$lg(1-(x-3)^2)\geq|x-3|$$

քանի որ $y=lg\,x$-ը աճող ֆունկցիա է $[0;+\infty)$-ում, ապա ձախ մասը իր մեծագույն արժեքն ընդունում է $x=3$ դեպքում և այն հավասար է $lg(1-(3-3)^2)=lg\,1=0$, իսկ աջ մասի փոքրագույն արժեքն է ստացվում $x=3$ դեպքում և այն հավասար է $|3-3|=0$, այսինքն անհավասարմանը բավարարում է միայն $x=3$ թիվը:

Պատ.՝ $x=3$

<u>10-րդ</u> 353(ա) $\sqrt{x^6+4}>2-|x|$

Քանի որ $y=\sqrt{x}$-ը աճող ֆունկցիա է $x\in[0;+\infty)$-ում, ապա ձախ մասի փոքրագույն արժեքը ստացվում է $x=0$ դեպքում և այն հավասար է $\sqrt{0^6+4}=2$, իսկ աջ մասի մեծագույն արժեքն է ստացվում $x=0$ դեպքում և հավասար է $2-|0|=2$: Այսինքն միայն $x=0$ դեպքում անհավասարումը ճիշտ չէ, որովհետև $x\neq 0$

դեպքում $\sqrt{x^6+4}>2$, իսկ $2-|x|<2$, այսինքն 0-ից տարբեր ցանկացած թիվ անհավասարման լուծում է:

Պատ.՝ $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

575(ա) $\underline{y=log_{0,5}(32+x^2)}$

Քանի որ $log_{0,5}x$ ֆունկցիան նվազող է $(0,5<1)$ և $32+x^2\geq 32$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, ապա y-ի մեծագույն արժեքը կստացվի $x=0$ դեպքում և հավասար կլինի $log_{0,5}(32+0^2)+7=-5+7=2$, իսկ y-ի փոքրագույն արժեք գոյություն չունի, որովհետև $log_{0,5}x$ ֆունկցիան սահմանափակ չէ ներքևից:

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը 2 է,
փոքրագույն արժեք չունի:

575(բ) $y=log_{0,2}(1+4sin^2x)$

$1+4sin^2x$-ի փոքրագույն արժեքը ստացվում է $sin\,x=0$ դեպքում և հավասար է 1, իսկ մեծագույն արժեքը ստացվում է $sin\,x=1$ (կամ $sin\,x=-1$) դեպքում և հավասար է $1+4\cdot 1=5$: Ուստի, քանի որ $log_{0,2}x$ ֆունկցիան նվազող է, ապա նրա մեծագույն արժեքը կլինի $log_{0,2}1=0$, իսկ փոքրագույն արժեքը՝ $log_{0,2}5=-1$

Պատ.՝ մեծագույն արժեքը 0 է,
փոքրագույն արժեքը ՝ -1:

<u>576(բ)</u> $y=\dfrac{25}{5+(0,8)^{\sqrt{x}-1}}$ թ.ա.բ. $x\geq 0$

քանի որ $0,8<1,$ ապա $y=0,8^x$ ֆունկցիան նվազող է, ուստի $(0,8)^{\sqrt{x}-1}$-ի մեծագույն արժեքը կստացվի $x=0$ դեպքում և հավասար է $0,8^{-1}=\dfrac{5}{4}$, իսկ փոքրագույն արժեք $(0,8)^{\sqrt{x}-1}$-ը չունի՝ ըստ ցուցչային ֆունկցիայի հատկության: Ուստի y-ի փոքրագույն արժեքը կլինի $\dfrac{25}{5+\frac{5}{4}}=4$, իսկ մեծագույն արժեք y-ը չունի:

Պատ.՝ մեծագույն արժեք չկա,
փոքրագույն արժեքը 4 է:

9-րդ դաս 544

Ապացուցել որ եթե A-ն և B-ն սուրանկյուն եռանկյան անկյուններ են, ապա $tgA\cdot tgB>1$

Լուծում. քանի որ $A+B+C=180^o$ և $C<90^o\Rightarrow A+B>90^o\Rightarrow$

$\Rightarrow A > 90^o - B \Rightarrow tgA > tg(90^o - B)$ (1), քանի որ A-ն և $90^o - B$-ն I քառորդի անկյուններ են, իսկ I քառորդում tgx-ը աճող է: Հաշվի առնելով, որ $tg(90 - B) = ctgB$, (1)-ից կստանանք՝ $tgA > ctgB \Rightarrow tgA > \dfrac{1}{tgB} \Rightarrow tgA \cdot tgB > 1$

<u>310.</u> ապացուցել, որ ցանկացած $a \in [-1;1]$ թվի համար

$$arcsin\, a + arccos\, a = \frac{\pi}{2}$$

<u>Լուծում.</u> Ապացուցենք, որ $arcsin\, a = \dfrac{\pi}{2} - arccos\, a$

Նշ. $arcsin\, a = \alpha \Rightarrow sin\,\alpha = a,\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

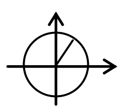
$arccos\, a = \beta \Rightarrow cos\,\beta = a,\ \beta \in [0;\pi]$

Այսպիսով, պետք է ապացուցել, որ $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$

Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $sin\,\alpha = sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$ (1) և α, $\dfrac{\pi}{2} - \beta$ անկյունները պատկանում են $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ միջակայքին, որովհետև $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$-ում $sin\,x$-ը աճող է և հետևաբար (1)-ից կհետևի, որ $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$:

Ըստ պայմանի, $\sin\alpha = a$ և $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ մնում է ստուգել, որ $sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = a$ և $\dfrac{\pi}{2} - \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\,\beta = a$$



Ըստ պայմանի՝ $0 \le \beta \le \pi$ (բազմ.-1) $0 \ge -\beta \ge -\pi$ (գումարենք $\dfrac{\pi}{2}$)

$\dfrac{\pi}{2} + 0 \ge \dfrac{\pi}{2} - \beta \ge -\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{\pi}{2} \ge \dfrac{\pi}{2} - \beta \ge -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} - \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ և ապացույցն ավարտված է:

312. Ապացուցել, որ ցանկացած $a_1, a_2 \in [-1;1]$ թվերի համար $a_1 < a_2$ պայմանից հետևում է, որ

1) $arcsin\, a_1 < arcsin\, a_2$

Լուծում. Նշ. $arcsin\, a_1 = \alpha_1 \Rightarrow sin\, \alpha_2 \Rightarrow a_1$ և $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$arcsin\, a_2 = \alpha_2 \Rightarrow sin\, \alpha_2 = a_2 \text{ և } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

և կատարենք հակասող ենթադրություն՝ որ գոյություն ունեն $a_1 a_2 \in [-1:1]$ այնպես որ $a_1 < a_2$, բայց $arcsin\, a_1 \geq arcsin\, a_2$ կամ $\alpha_1 \geq \alpha_2$: Այստեղից, քանի որ $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ և $sin\, x$-ը $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ում աճող է, կհետևի $\sin\alpha_1 \geq \sin\alpha_2$ կամ $a_1 \geq a_2$, որը հակասում է $a_1 < a_2$ պայմանին: Ուստի մեր ենթադրությունը սխալ էր և $arcsin\, a_1 < arcsin\, a_2$:

2) Ապացուցել հավասարությունը.

$$arcsin\frac{3}{4} - arccos\frac{3+\sqrt{21}}{8} = \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

Պարզ է, որ եթե $f(x)$-ը մոնոտոն (աճող կամ նվազող նվազող) ֆունկցիա է մի որևէ (a,b) (կամ $[a,b]$) միջակայքում և $f(x_1) = f(x_2)$, որտեղ $x_1, x_2 \in (a,b)$ ապա $x_1 = x_2$, որովհետև մոնոտոն ֆունկցիան իր յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է միայն մեկ կետում:

Ապացուցվելիք (1) հավասարությունը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$arccos\frac{3+\sqrt{21}}{8} = arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

Նշ. $arccos\frac{3+\sqrt{21}}{8} = x_1, arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6} = x_2$ և ստուգենք, որ

1) $cos\, x_1 = cos\, x_2$, 2) $x_{1,}\quad x_2 \in [0;\pi]$, դրանով (2)-ը կլինի ապացուցված, որովհետև $cos\, x$ ֆունկցիան $[0;\pi]$-ում նվազող է:

1) $cos\, x_1 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{8}$

$cos\, x_2 = cos(arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}) =$ Նշ. $arcsin\frac{3}{4} = \alpha \Rightarrow$

$cos\,\alpha\, cos\frac{\pi}{6} + sin\,\alpha\, sin\frac{\pi}{6} =$ $\quad sin\,\alpha = \frac{3}{4}; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}+3}{8}$ $\quad cos\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

2) $x_1 \in [0;\pi]$- ըստ $arccos$-ի սահմանման:

Մյուս կողմից` $\frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow arcsin\frac{3}{4} > arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow arcsin\frac{3}{4} > \frac{\pi}{6}$ (որովհետև $arcsin\,x$-ը աճող ֆունկցիա է): Այստեղից` $0 < arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, այսինքն $x_2 \in [0;\pi]$ և ապացույցն ավարտված է:

<u>9-րդ դաս</u> 537

$sin\,\alpha, cos\,\alpha, tg\,\alpha, ctg\,\alpha$ մեծությունները դասավորել աճման կարգով, եթե $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$:

Լուծում. $sin\,\alpha$-ն և $tg\,\alpha$-ն I քառորդում աճող են, իսկ $cos\,\alpha$-ն և $ctg\,\alpha$-ն նվազող, ուստի

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \Rightarrow sin\,\alpha < sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ cos\,\alpha > cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$tg\,\alpha < tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg\,\alpha > ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, այսինքն $cos\,\alpha$-ն մեծ է $sin\,\alpha$-ից և $tg\,\alpha$-ից, իսկ $ctg\,\alpha > cos\,\alpha$, որովհետև $cos\,\alpha < 1 < \sqrt{3} < ctg\,\alpha$: Մնում է համեմատել $tg\,\alpha$-ն և $sin\,\alpha$-ն. կազմենք տարբերությունը`

$$tg\,\alpha - sin\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} - sin\,\alpha = \frac{sin\,\alpha(1 - cos\,\alpha)}{cos\,\alpha} > 0,$$

որովհետև $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow tg\,\alpha > 0, cos\,\alpha < 1$.

Պատ`. $sin\,\alpha, tg\,\alpha, cos\,\alpha, ctg\,\alpha$:

8) Ապացուցել, որ (9-րդ դաս 542(ա))

$$sin\,25^o + cos\,15^o > 1$$

$$sin\,25^o + cos\,15^o = cos(90^o - 25^o) + cos\,15^o = cos\,65^o + cos\,15^o =$$

$$= 2\,cos\,40^o \cdot cos\,25^o$$

քանի որ $cos\,x$-ը I քառորդում նվազող է և դրական, ապա $cos\,40^o > cos\,45^o$ և $cos\,25^o > cos\,45^o \Rightarrow cos\,40^o \cdot cos\,25^o > cos\,45^o \cdot cos\,45^o \Rightarrow$

$$sin\,25^o + cos\,15^o > 2(cos\,45^o)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1:$$