ՀԱՎԵԼՎԱԾ
Ֆունկցիայի հետազոտումը և գրաֆիկը

Այս բաժնում բերված են ֆունկցիայի հետազոտման հետ առնչվող տարբեր բնույթի խնդիրների լուծումներ, ընդ որում այդ խնդիրները, ինչպես նաև անհրաժեշտ սահմանումները և փաստերը վերցված են ներկայումս գործող դպրոցական դասագրքերից:

Ֆունկցիայի զույգությունը և կենտությունը

Սահմանում. Կորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ սիմետրիկ (համաչափ) որոշման տիրույթ ունեցող $f(x)$ ֆունկցիան (այսինքն $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$, որտեղ $D(f)$-ը $f(x)$-ի որոշման տիրույթն է) կոչվում է զույգ, եթե ցանկացած $x \in D(f)$-ի համար՝ $f(-x) = f(x)$ և կենտ, եթե $f(-x) = -f(x)$:

Օրինակներ. 1) $y = cos\, x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիան զույգ է, որովհետև $D(y) = (-1;1)$ $(1-x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-1;1))$ և

$$y(-x) = cos(-x) + \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = cos\, x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y(x)$$

Նկատենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան ոչ զույգ է ոչ կենտ, եթե կամ նրա որոշման տիրույթը սիմետրիկ չէ 0 կետի նկատմամբ, կամ գոյություն ունի $x_0 \in D(f)$, այնպես որ $-x_0 \in D(f)$ բայց $\left|f(x_0)\right| \neq \left|f(-x_0)\right|$

2) $y = ln^2 x + 2cos\, x$ ֆունկցիան ոչ զույգ է, ոչ կենտ, որովհետև $x = 1$ կետը պատկանում է նրա որոշման տիրույթին՝ $D(y) = (0;+\infty)$ իսկ $x = -1$ կետը՝ ոչ, այսինքն $D(y)$-ը սիմետրիկ չէ $x = 0$ կետի նկատմամբ:

3) $y = (x-1)^2 \cdot cos\, x$ ֆունկցիան նույնպես ոչ զույգ է, ոչ կենտ (չնայած, որ նրա որոշման տիրույթը $(-\infty;+\infty)$-է), որովհետև $x = 2\pi$ և $x = -2\pi$ կետերում այդ ֆունկցիան ընդունում է իրարից մոդուլով տարբեր արժեքներ՝

$$y(2\pi) = (2\pi - 1)^2 \cdot cos\, 2\pi = (2\pi - 1)^2$$
$$y(-2\pi) = (-2\pi - 1)^2 \cdot cos(-2\pi) = (2\pi + 1)^2$$

(9-րդ. 231-235)

231(ա,ե) Դիցուք f-ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ g-ն՝ կենտ: Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որոնք՝ կենտ:

ա) $f \cdot g$ Լուծում . Ըստ պայմանի՝ ցանկացած $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ և $f(-x) = f(x)$ և ցանկացած $x \in D(g) \Rightarrow -x \in D(g)$ և $g(-x) = -g(x)$:

Ն2. $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow D(h) = D(f) \bigcap D(g)$

եթե $x \in D(h) \Rightarrow x \in D(f)$ և $x \in D(g) \Rightarrow -x \in D(f)$ և $-x \in D(g) \Rightarrow -x \in D(f) \bigcap D(g) \Rightarrow -x \in D(h)$, ընդ որում՝ $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$, ուստի $h(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է:

Պատ.՝ $f \cdot g$-ն կենտ է:

ե) fog

Ն2. $h(x) = f(g(x))$: Ըստ $h(x)$-ի սահմանման, $D(h)$-ին պատկանում են այն և միայն այն x-երը $D(g)$-ից, որոնց համար $g(x) \in D(f)$:

Ուստի եթե $x \in D(h)$, ապա $x \in D(g)$ և $g(x) \in D(f)$: Քանի որ $g(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է, ապա $-x \in D(g)$ և $g(-x) = -g(x)$, իսկ քանի որ $f(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, ապա $g(x) \in D(f) \Rightarrow -g(x) \in D(f)$. Այսպիսով,ստացվեց, որ $-x \in D(g)$ և $g(-x) \in D(f)$ այսինքն $-x \in D(h)$, ընդ որում $h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x)$, այսինքն $h(x)$-ը զույգ է:

Պատ.՝ fog-ն զույգ ֆունկցիա է:

232(ա,գ) Դիցուք f-ը զույգ ֆունկցիա է, g-ն՝ կենտ, իսկ h-ը՝ ցանկացած: Զույգ են թե կենտ հետևյալ ֆունկցիաները: Բերել համապատասխան օրինակներ

ա) hog կամ $h(g(x))$

Վերցնենք $h(x) = x - 2$, $g(x) = x \Rightarrow h(g(x)) = x - 2$ ոչ զույգ է, ոչ կենտ, որովհետև օրինակ 1 և -1 կետերում $x - 2$ ֆունկցիան ընդունում է մոդուլով իրարից տարբեր արժեքներ՝ -1 և -3:

գ) hof կամ $h(f(x))$:

Ն2. $F(x) = h(f(x))$ և ցույց տանք, որ $F(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է.

Ըստ սահմանման $x \in D(F)$-ը համարժեք է $x \in D(f)$ և $f(x) \in D(h)$ պայմաններին: Քանի որ $f(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, ապա $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ և քանի որ $f(-x) = f(x)$, ապա $f(-x) \in D(h)$. այսպիսով $-x \in D(f)$ և $f(-x) \in D(h)$, այսինքն $-x \in D(F)$, ընդ որում՝ $F(-x) = h(f(-x)) = h(f(x)) = F(x)$, այսինքն $F(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է:

233 Ապացուցել, որ ցանկացած f ֆունկցիայի համար

ա) $F(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ ֆունկցիան զույգ է, եթե $D(F) \neq \phi$

բ) $F(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ ֆունկցիան կենտ է (եթե $D(F) \neq \phi$)

Լուծում ա) եթե $x_0 \in D(F)$, ապա ըստ երկու ֆունկցիաների գումարի սահմանման,

$x_0 \in D(f) \bigcap D(g)$, որտեղ $g(x)=f(-x) \Rightarrow D(g)$-ի կետերը ստացվում են $D(f)$-ին պատկանող թվերը -1-ով բազմապատկելով.

Ուստի $x_0 \in D(f)$ և $x_0 \in D(g)$ հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $-x_0 \in D(f)$ և հետևաբար $-x_0 \in D(g)$, այսինքն

$-x_0 \in D(f) \bigcap D(g) \Rightarrow -x_0 \in D(F)$,

Ընդ որում՝ $F(-x)=\dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=F(x)$, այսինքն $F(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է:

Նույն ձևով ապացուցվում է բ) պնդումը.

234. Դիցուք f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համաչափ է 0 կետի նկատմամբ:

Օգտվելով նախորդ խնդրից, f ֆունկցիան ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար:

Լուծում. Քանի որ $D(f)$-ը համաչափ է 0 կետի նկատմամբ, ապա $f(x)$ և $f(-x)$ ֆունկցիաների որոշման տիրույթը նույն $D(f)$ բազմությունն է: Ցանկացած $x \in D(f)$-ի համար՝

(1) $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=h_1(x)+h_2(x)$ և քանի որ

$$h_1(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=h_1(x)$$

$h_2(-x)=\dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h_2(x)$, ապա ապացույցն ավարտված է:

Օգտվելով նախորդ խնդրից, տրված ֆունկցիան ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար

235(բ) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, քանի որ $x^2+x+1 \neq 0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար (որովհետև $D=1-4=-3<0$), ապա $D(y)=(-\infty;+\infty)$, այսինքն $D(y)$-ը սիմետրիկ (համաչափ) է 0 կետի նկատմամբ, ուստի ըստ (1) բանաձևի՝

$$y(x)=\frac{y(x)+y(-x)}{2}+\frac{y(x)-y(-x)}{2}$$

$$\frac{y(x)+y(-x)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+(-x)+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)(x^2-x+1)+(x^2+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)\cdot(2x^2+2)}{(x^2+1)^2-x^2}=$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2+1)}{x^4+x^2+1}$$

$$\frac{y(x)-y(-x)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1-x^2-x-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{-x(x^2+1)}{x^4+x^2+1}$$

Պատ.` $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4+x^2+1}+\frac{-x\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}$:

Ֆունկցիաների Պարբերականությունը

<u>Սահմանում 1</u> f ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե գոյություն ունի զրոյից տարբեր այնպիսի T թիվ, որ $x\in D(f)$ պայմանից հետևում է, որ $x\pm T\in D(f)$ և $f(x+T)=f(x)$:

Այդ դեպքում T թիվն անվանում են f ֆունկցիայի պարբերություն:

<u>Սահմանում 2</u> Պարբերական ֆունկցիայի փոքրագույն դրական պարբերությունը (եթե այն գոյություն ունի) կանվանենք հիմնական պարբերություն: Եթե T-ն f ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է, ապա կասենք, որ f ֆունկցիան T-պարբերական է:

<u>Դիտողություն 1</u> Եթե T-ն $f(x)$-ի համար պարբերություն է, ապա ցանկացած kT թիվ, որտեղ $k\in Z$ նույնպես $f(x)$-ի համար պարբերություն է: Իրոք, ցանկացած $x\in D(f)$ համար $x+T\in D(f)\Rightarrow x+T+T\in D(f)$ ուստի $f(x+2T)=f(\underline{x+T}+T)=f(x+T)=f(x)$, այսինքն $2T$-ն նույնպես պարբերություն է $f(x)$-ի համար: Նույն ձևով ցույց կտանք, որ $3T$, $4T$ և այլն պարբերություն են $f(x)$-ի համար:

Մյուս կողմից, ցանկացած $x\in D(f)\Rightarrow x-T\in D(f)\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T)=f(x+(-T))$, այսինքն $-T$-ն $f(x)$-ի համար պարբերություն է: Ուստի, ինչպես նախորդ դեպքում, կստանանք, որ $-2T$, $-3T$, $-4T$ … թվերը նույնպես $f(x)$-ի պարբերություն են:

<u>Դիտողություն 2</u> Եթե T_1-ը և T_2-ը $f(x)$-ի համար պարբերություն են, ապա T_1+T_2 և T_1-T_2 թվերը նույնպես $f(x)$-ի պարբերություն են: Իրոք, ցանկացած $x\in D(f)$-ի համար $x+T_1\in D(f)\Rightarrow x+T_1+T_2\in D(f)$, ուստի $f(x+T_1+T_2)=f(\underline{x+T_1}+T_2)=f(x+T_1)=f(x)$, այսինքն T_1+T_2-ը $f(x)$-ի պարբերություն է: Նույն ձևով ապացուցվում է T_1-T_2-ի պարբերություն լինելը:

(219$_{(ա)}$, 221, 225, 227) Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

223. (ա) $y = cos\,2x + cos^2 x \quad D(y) = (-\infty;+\infty)$

Դիցուք T -ն y -ի պարբերությունն է: Ուստի ցանկացած x -ի համար՝

$$y(x+T) = y(x)$$

$$cos\,2(x+T) + cos^2(x+T) = cos\,2x + cos^2 x$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $x = 0$, կստանանք՝

$$cos\,2T + cos^2 T = 2$$

$$cos\,2T + \frac{1+cos\,2T}{2} = 2$$

$$3cos\,2T = 3$$

$cos\,2T = 1 \Rightarrow 2T = 2\pi n$, $T = \pi n$, $n \in Z$; πn տեսքի թվերի մեջ ամենափոքր դրական թիվը π -ն է: Մնում է ստուգել, որ π -ն իրոք y -ի պարբերությունն է՝

$$y(x+\pi) = cos\,2(x+\pi) + cos^2(x+\pi) = cos(2x+2\pi) + (cos(x+\pi))^2 =$$

$= cos\,2x + (-cos\,x)^2 = cos\,2x + cos^2 x = y(x)$: Պատ.՝ π :

բ) Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը

$y = tgx + sin\,2x$; y --ը իմաստ ունի, եթե $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

Դիցուք T -ն y -ի պարբերությունն է՝

$y(x+T) = y(x)$ ցանկացած $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ թվի համար

$$tg(x+T) + sin\,2(x+T) = tgx + sin\,2x$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $x = 0$, կստանանք՝

$tgT + \sin 2T = 0$

$\frac{sin\,T}{cos\,T} + 2\,sin\,T\,cos\,T = 0 \qquad \begin{cases} sin\,T \cdot (1 + 2\,cos^2 T) = 0 \\ cos\,T \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow sin\,T = 0 \Rightarrow T = \pi n$, $n \in Z$

πn ($n \in Z$) թվերից ամենափոքր դրական թիվը π -ն է: Ստուգենք, որ π -ն y -ի պարբերությունն է. նախ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x \pm \pi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ և

$$y(x+\pi) = tg(x+\pi) + sin\,2(x+\pi) = tgx + sin(2x+2\pi) = tgx + sin\,2x = y(x)$$

Պատ.՝ π :

224(ա) $y = sin\,x + cos\,x$, $D(y) = (-\infty;+\infty)$

նախ պարզեցնենք աջ մասը՝

$$y = sin\,x + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\,sin\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot cos\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = \sqrt{2} \cdot cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Դիցուք T-ն y-ի պարբերությունն է՝ $y(x+T)=y(x)$, x-ի ցանկացած արժեքի համար $\sqrt{2}\cdot cos\left(x+T-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $x=\frac{\pi}{4}$, կստանանք՝

$cos T=1 \Rightarrow T=2\pi n$, $n\in Z$; $2\pi n$ ($n\in Z$) թվերից ամենափոքր դրական թիվը 2π-ն է: Ստուգենք, 2π-ն y-ի պարբերությու՞նն է.

$y(x+2\pi)=sin(x+2\pi)+cos(x+2\pi)=sin\,x+cos\,x=y(x)$

բ) $y=ctgx+\sin^2 x$, $x\neq \pi n$

Դիցուք T-ն y-ի պարբերությունն է՝ $y(x+T)=y(x)$, ցանկացած $x\neq\pi n$ թվի համար $ctg(x+T)+sin^2(x+T)=ctgx+sin^2 x$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $x=\frac{\pi}{2}$, կստանանք՝

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+T\right)+\left(sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\right)^2=ctg\,\frac{\pi}{2}+sin^2\frac{\pi}{2}$$

$$-tgT+\cos^2 T=1$$

$$-tgT+\frac{1}{1+tg^2T}=1\Leftrightarrow -tgT-tg^3T+1=1+tg^2T$$

$$tgT\cdot(1+tgT+tg^2T)=0$$

$$tgT+tg^2T+tg^3T=0\quad \left[\begin{array}{l} tgT=0\Rightarrow T=\pi n\\ 1+tgT+tg^2T=0...\emptyset\end{array}\right.$$

πn, $n\in Z$ թվերի մեջ ամենափոքր դրական թիվը π-ն է: Ստուգենք, π-ն y-ի պարբերությու՞նն է. նախ $x\neq\pi n\Rightarrow x\pm\pi\neq\pi n$ և

$y(x+\pi)=ctg(x+\pi)+sin^2(x+\pi)=ctgx+(-sin\,x)^2=ctgx+sin^2 x=y(x)$

Պատ.՝ π

<u>9-րդ դաս</u>. 568.

Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը՝

ա) $y=|sin(x+5)|$

$D(y)=(-\infty;+\infty)$

Դիցուք T-ն y-ի պարբերությունն է այսինքն ցանկացած $x\in(-\infty;+\infty)$-ի համար $y(x+T)=y(x)$

$|sin(x+T+5)|=|sin(x+5)|$

տեղադրելով այս նույնության մեջ $x=-5$, կստանանք՝

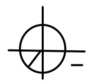
$|sin\,T|=|sin\,0|$

$|sinT| = 0 \Rightarrow sinT = 0 \Rightarrow T = \pi n,\ n \in Z$

$\pi n(n \in Z)$ թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը π-ն է: Ստուգենք, որ π-ն y-ի պարբերությունն է՝

$y(x+\pi) = |sin(x+\pi+5)| = |sin(\pi+(x+5))| = |-sin(x+5)| =$

$= |sin(x+5)| = y(x)$



բ) $y = 7 - cos^2(x+6)$

$D(y) = (-\infty;+\infty)$

Դիցուք T-ն y-ի պարբերությունն է, այսինքն ցանկացած $x \in (-\infty;+\infty)$-ի համար $y(x+T) = y(x)$

$7 - cos^2(x+T+6) = 7 - cos^2(x+6)$

տեղադրելով այս նույնության մեջ $x = -6$, կստանանք՝ $cos^2 T = cos^2 0$

$1 - cos^2 T = 0 \Rightarrow sin^2 T = 0\ \ sinT = 0 \Rightarrow T = \pi n,\ n \in Z$

$\pi n\ (n \in Z)$ թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը π-ն է: Ստուգենք, որ π-ն y-ի պարբերություն է՝

$y(x+\pi) = 7 - cos^2(x+\pi+6) = 7 - (cos(\pi+(x+6)))^2 =$

$= 7 - (-cos(x+6))^2 = 7 - cos^2(x+6) = y(x)$

Պատ՝ π

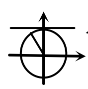
գ) $y = 3|ctgx| - 13\ \ x \neq \pi n,\ n \in Z$

Դիցուք T-ն y-ի պարբերությունն է, այսինքն ցանկացած $x \neq \pi n$ թվի համար՝ $y(x+T) = y(x)$

$3|ctg(x+T)| - 13 = 3|ctgx| - 13$

Տեղադրելով այս նույնության մեջ $x = \frac{\pi}{2}$, կստանանք $\left|ctg\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\right| = \left|ctg\frac{\pi}{2}\right|$

$|-tgT| = 0 \Rightarrow tgT = 0 \Rightarrow T = \pi n,\ n \in Z$



$\pi n\ (n \in Z)$ թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը π-ն է: Ստուգենք, որ π-ն y-ի պարբերություն է. նախ $x \neq \pi n \Rightarrow x \pm \pi \neq \pi n$ և

$y(x+\pi) = 3|ctg(x+\pi)| - 13 = 3|ctgx| - 13 = y(x)$

Պատ.՝ π

10-րդ 251(գ)

Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը՝ $\dfrac{sin 4x}{sin^2 2x + sin 2x}$

Ն2.

$$f(x)=\frac{\sin 4x}{\sin^2 2x+\sin 2x}=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x(\sin 2x+1)}=\frac{2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=2\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=2\cdot\frac{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}=2\cdot\frac{1-tgx}{1+tgx}=2\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$f(x)$ ֆունկցիան որոշված է, եթե և $\begin{matrix}\sin 2x\neq 0\\ \sin 2x\neq -1\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}2x\neq\pi k\\ 2x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x\neq\frac{\pi n}{2}\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n\end{matrix}$

$n\in Z$

Դիցուք T-ն $f(x)$-ի պարբերությունն է, այսինքն ցանկացած $x\in D(f)$-ի համար

$x\pm T\in D(f)$ և $f(x+T)=f(x)$

$tg\left(\frac{\pi}{4}-(x+T)\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ այս նույնության մեջ տեղադրելով $x=\frac{\pi}{4}$,

կստանանք՝ $tg(-T)=tg0\Rightarrow tgT=0\Rightarrow T=\pi n$, $n\in Z$

πn, $(\pi\in Z)$ թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը π-ն է: Ստուգենք, որ π-ն $f(x)$-ի պարբերություն է: Իրոք, նախ $x\neq\frac{\pi n}{2}$ և $x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n$ պայմաններից հետևում է, որ $x\pm\pi\neq\frac{\pi n}{2}$ և $x\pm\pi\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n$ և

$$f(x+\pi)=\frac{\sin 4(x+\pi)}{\sin^2 2(x+\pi)+\sin 2(x+\pi)}=\frac{\sin(4x+4\pi)}{\sin^2(2x+2\pi)+\sin(2x+2\pi)}=$$

$$=\frac{\sin 4x}{\sin^2 2x+\sin 2x}=f(x):$$

Պատ.՝ π:

219. (ա) Դիցուք f-ը T պարբերական ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ ցանկացած $a\neq 0$ թվի համար T-ն պարբերական է նաև F ֆունկցիան, եթե ա) $F(x)=f(x-a)$

Տված է, որ գոյություն ունի $T>0$ թիվ, որ ցանկացած $x\in D(f)\Rightarrow x\pm T\in D(f)$ և $f(x+T)=f(x)$, ընդ որում T-ն նշված պայմանին բավարարող թվերի մեջ փոքրագույնն է:

Նախ ստուգենք, որ T-ն կլինի պարբերություն նաև $F(x)$-ի համար:

Եթե $x_0 \in D(F)$, ապա $x_0 + a \in D(f)$ և հակառակը՝ եթե մի որևէ x_0 թվի համար $x_0 + a \in D(f)$, ապա $x_0 \in D(F)$, ըստ $F(x)$-ի սահմանման: Ուստի
<u>եթե</u> $x \in D(F) \Rightarrow x + a \in D(f) \Rightarrow x + a \pm T \in D(f)$ կամ
$x \pm T + a \in D(f) \Rightarrow x \pm T \in D(F)$
և $F(x+T) = f(x+T+a) = f(\underline{x+a}+T) = f(x+a) = F(x)$
Մնում է ստուգել, որ T-ից փոքր դրական պարբերություն $F(x)$-ը չունի:
Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $0 < T_1 < T$ թիվ այնպես, որ ցանկացած $x \in D(F)$-ի համար $x \pm T_1 \in D(F)$ և $F(x+T_1) = F(x)$ կամ որ նույնն է՝ $f(x+a+T_1) = f(x+a)$. վերը նշվածից հետևում է, որ եթե նշ. $x + a = y$, ապա $y \in D(f)$ և կստացվի, որ $D(f)$-ին պատկանող ցանկացած y-ի համար՝ $f(y+T_1) = f(y)$, որը կնշանակի՝ T_1-ը $f(x)$-ի պարբերություն է, իսկ դա հնարավոր չէ, քանի որ T-ն $f(x)$-ի ամենափոքր դրական պարբերությունն էր:

221.Դիցուք f-ը T պարբերական ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ ցանկացած $k \neq 0$ թվի համար $F(x) = f(kx)$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը հավասար է՝ $\dfrac{T}{|k|}$:

<u>Լուծում</u>. Տված է, որ գոյություն ունի $T > 0$ թիվ այնպիսին, որ ցանկացած $x \in D(f)$-ի համար $x \pm T \in D(f)$ և $f(x+T) = f(x)$, ընդորում T-ն նշված պայմանին բավարարող թվերի մեջ փոքրագույնն է: Նախ ստուգենք, որ $\dfrac{T}{|k|}$-ն $F(x)$-ի համար պարբերություն է:
Սկզբում քննարկենք $k > 0$ դեպքը:
Ըստ $F(x)$-ի սահմանման, եթե $x_0 \in D(F)$, ապա $k \cdot x_0 \in D(f)$ և հակառակը, եթե մի որևէ $y_0 \in D(f)$, ապա $\dfrac{1}{k} \cdot y_0 \in D(F)$, այսինքն $D(F)$-ը բաղկացած է այն և միայն այն կետերից, որոնք ներկայացվում են $\dfrac{1}{k} \cdot t$ տեսքով, որտեղ $t \in D(f)$:
Ուստի, եթե

$$x \in D(F) \Rightarrow kx \in D(f) \Rightarrow kx \pm T \in D(f) \Rightarrow k \cdot \left(x \pm \frac{T}{k}\right) \in D(f) \Rightarrow x \pm \frac{T}{k} \in D(F)$$

և $F\left(x + \dfrac{T}{k}\right) = f\left(k \cdot \left(x + \dfrac{T}{k}\right)\right) = f(kx+T) = f(kx) = F(x)$, այսինքն

$\dfrac{T}{k} > 0$-ն $F(x)$-ի համար պարբերություն է:

Նույն ձևով, $k<0$ դեպքում կստանանք, որ $\frac{T}{-k}>0$-ն $F(x)$-ի պարբերությունն է, այսինքն $\frac{T}{|k|}$-ն $F(x)$-ի դրական պարբերություն է: Իսկ որ $F(x)$-ը $\frac{T}{|k|}$-ից փոքր դրական պարբերություն չունի, ցույց է տրվում, ինչպես նախորդ օրինակում: Նորից քննարկենք $k>0$ դեպքը, և ենթադրենք, գոյություն ունի $0<T_1<T$ թիվ, այնպես, որ $\frac{T_1}{k}$-ն $F(x)$-ի պարբերությունն է, այսինքն՝ $F\left(x+\frac{T_1}{k}\right)=F(x)$ ցանկացած $x\in D(F)$-ի համար, այստեղից՝ $f\left(k\left(x+\frac{T_1}{k}\right)\right)=f(kx)$

$f(kx+T_1)=f(kx)$ նշ. $kx=y$, ստանում ենք, որ $f(y+T_1)=f(y)$ ցանկացած $y\in D(f)$-ի համար, իսկ դա կնշանակի, որ T_1-ը $f(x)$-ի համար պարբերություն է, որը հնարավոր չէ, որովհետև T -ն $f(x)$-ի փոքրագույն դրական պարբերությունն էր. ուստի մեր ենթադրությունը սխալ էր և $F(x)$-ը $\frac{T}{|k|}$-ից փոքր պարբերություն չունի:

225.Դիցուք f -ը և g -ն T -պարբերական ֆունկցիաներ են: Ապացուցել, որ $F(x)=f(mx)+g(nx)$ ֆունկցիան պարբերական է, եթե հայտնի է, որ

ա) m -ը և n -ը ամբողջ թվեր են

եթե $x_0\in D(F)$, ապա $mx_0\in D(f)$ և $nx_0\in D(g)\Rightarrow mx_0+mT\in D(f)$ և $nx_0+nT\in D(g)$, որովհետև mT -ն f -ի պարբերությունն է և nT -ն g -ի, (ըստ դիտող.-1-ի): $m(x_0+T)\in D(f)$ և $n(x_0+T)\in D(g)$ առնչությունից բխում է $x_0+T\in D(F)$:

Այսպիսով, $x\in D(F)\Rightarrow x+T\in D(F)$ և նույն կերպ $x-T\in D(F)$:

$$F(x+T)=f(m(x+T))+g(n(x+T))=f(mx+mT)+g(nx+nT)=$$
$$=f(mx)+g(nx)=F(x),$$

այսինքն ստացվեց, որ T -ն $F(x)$-ի համար պարբերություն է:

բ) m -ը և n -ը ռացիոնալ թվեր են .

դիցուք $m=\frac{p_1}{q_1}$, $n=\frac{p_2}{q_2}$, որտեղ p_1,q_1,p_2,q_2- ամբողջ թվեր են. (ընդ որում q_1և q_2-ը բնական թվեր են)

Ցույց տանք, որ $q_1 \cdot q_2 \cdot T$-ն $F(x)$-ի համար պարբերություն է: Իրոք, եթե $x \in D(F)$, ապա $x+q_1q_2T \in D(F)$, որովհետև $\frac{p_1}{q_1}x \in D(f)$ և $\frac{p_2}{q_2}x \in D(g) \Rightarrow \frac{p_1}{q_1}x+p_1q_2T \in D(f)$ և $\frac{p_2}{q_2}x+p_2q_1T \in D(g)$, որովհետև p_1q_2T-ն f-ի, իսկ p_2q_1T-ն g-ի պարբերություն է

(տես դիտող. 1) ուստի $\frac{p_1}{q_1}(x+q_1q_2T) \in D(f)$ և $\frac{p_2}{q_2} \cdot (x+q_1q_2T) \in D(g)$, իսկ վերջին երկու առնչությունից. բխում է $x+q_1q_2T \in D(F)$, ըստ $F(x)$-ի սահմանման:

Նույն կերպ ցույց է տրվում, որ $x \in D(F) \Rightarrow x-q_1q_2T \in D(F)$:

Մյուս կողմից՝

$$F(x+q_1q_2T)= f(m(x+q_1q_2T))+g(n(x+q_1q_2T))=$$

$$f\left(\frac{p_1}{q_1}(x+q_1q_2T)\right)+g\left(\frac{p_2}{q_2}(x+q_1q_2T)\right)=$$

$$= f(mx+p_1q_2T)+g(nx+p_2q_1T)= f(mx)+g(nx)=F(x)$$

և ապացույցն ավարտված է:

գ) $\frac{m}{n}$-ը ռացիոնալ թիվ է

Դիցուք $\frac{m}{n}=\frac{p_1}{q_1}$, որտեղ p_1 և q_1-ը ամբողջ թվեր են. նախ քննարկենք $m \neq 0$ դեպքը և ցույց տանք, որ $\frac{p_1}{m} \cdot T$ կամ $\frac{q_1}{n} \cdot T$ (որովհետև $\frac{p_1}{m}=\frac{q_1}{n}$) $F(x)$-ի համար պարբերություն է:

Իրոք, եթե $x \in D(F)$, ապա $x+\frac{p_1 \cdot T}{m} \in D(F)$, որովհետև՝ $mx \in D(f)$, $nx \in D(g) \Rightarrow mx+Tp_1 \in D(f)$ և $nx+T \cdot q_1 \in D(g)$, քանի որ $T \cdot p_1$ և Tq_1-ը համապատասխանաբար $f(x)$-ի և $g(x)$-ի համար պարբերություն են (ըստ դիտ. 1):

Այստեղից՝ $m(x+\frac{T \cdot p_1}{m}) \in D(f)$ և $n(x+\frac{T \cdot q_1}{n}) \in D(g)$ և քանի որ $\frac{T \cdot p_1}{m}=\frac{T \cdot q_1}{n}$, ապա $x+\frac{T \cdot p_1}{m} \in D(F)$, ըստ $F(x)$-ի սահմանման:

Մյուս կողմից` $F\left(x+\frac{T\cdot p_1}{m}\right)=f\left(m\left(x+\frac{T\cdot p_1}{m}\right)\right)+g\left(n\cdot\left(x+\frac{T\cdot p_1}{m}\right)\right)=$

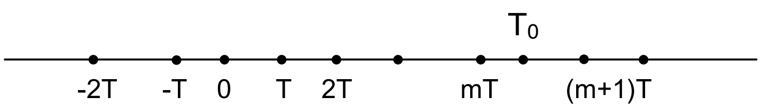
$$=f\left(m\cdot\left(x+\frac{T\cdot p_1}{m}\right)\right)+g\left(n\left(x+\frac{T\cdot q_1}{n}\right)\right)$$

$$=f\left(mx+Tp_1\right)+g\left(nx+Tq_1\right)=f(mx)+g(nx)=F(x)$$

և $m\neq 0$ դեպքում ապացույցն ավարտված է: Եթե $m=0$, ապա $F(x)=f(0)+g(nx)$: $f(0)$-ն հաստատուն ֆունկցիա է, որի համար ցանկացած թիվ պարբերություն է, իսկ $g(nx)$–ի համար պարբերություն է հանդիսանում, օրինակ $\frac{T}{|n|}$ թիվը (տես խնդիր 221), ուստի $\frac{T}{|n|}$-ը պարբերություն կհանդիսանա նաև $F(x)$-ի համար:

<u>9-րդ 227.</u> Ապացուցել, որ T- պարբերական ֆունկցիայի բոլոր պարբերությունները ունեն $k\cdot T$, $k\in Z$ տեսքը:

<u>Լուծում</u> Տված է, որ $f(x)$-ը T- պարբերական ֆունկցիա է, այսինքն գոյություն ունի $T>0$ թիվ, այնպես, որ $x\in D(f)\Rightarrow x\pm T\in D(f)$ և $f(x+T)=f(x)$, ընդ որում T-ն նշված պայմաններին բավարարող թվերի մեջ փոքրագույնն է: Ըստ դիտողություն 1-ի ցանկացած $k\cdot T$, $k\in Z$ նույնպես $f(x)$-ի պարբերություն է: Մնում է ստուգել, որ բացի $k\cdot T$, $k\in Z$ տեսքի թվերից $f(x)$ -ը ուրիշ պարբերություն չունի: Կատարենք հակասող ենթադրություն` գոյություն ունի $T_0\neq 0$ թիվ, որը $f(x)$-ի համար պարբերություն է, բայց T_0-ն $k\cdot T$ ($k\in Z$) տեսքի թիվ չէ, այսինքն $T_0\neq kT$ ($k\in Z$). Ուստի գոյություն ունի $m\in Z$ թիվ, որ $T_0\in(mT,(m+1)T)$ (որոշակիության համար ենթադրենք, որ $m\geq 0$)



Այստեղից կհետևի, որ $0<T_0-mT<T$: Նշ $T_0-mT=T'$ և ըստ դիտողություն 1 և դիտողություն 2-ի, կստանանք, որ T'-ը նույնպես $f(x)$-ի պարբերություն է, որովհետև T_0-ն և T-ն $f(x)$-ի պարբերություն էին: Իսկ սա հնարավոր չէ, որովհետև ստացվեց, որ $0<T'<T$, մինչդեռ T-ն $f(x)$-ի փոքրագույն դրական պարբերությունն էր: Ուստի մեր ենթադրությունը սխալ էր և $f(x)$-ը բացի $k\cdot T$, $k\in Z$ տեսքի թվերից այլ պարբերություններ չունի: