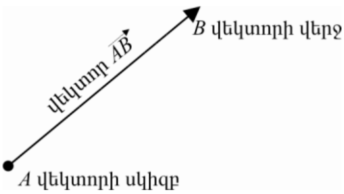
ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ ԵՎ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ, ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում. Տարածության մեջ կամ (հարթության վրա) այն հատվածը, որի համար ցուցանշված է, թե նրա ծայրերից որն է սկիզբը և որը՝ վերջը, կոչվում է ուղղորդված հատված կամ վեկտոր:

Վեկտորները նշանակվում են $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... կամ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ...տառերով:

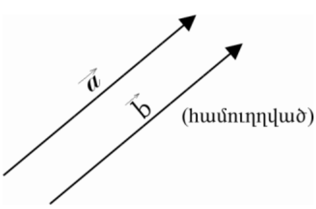


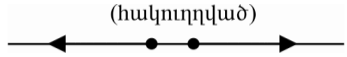
Պայմանավորվենք հարթության յուրաքանչյուր կետը համարել զրոյական վեկտոր: Զրոյական վեկտորի սկիզբը և վերջը համընկնում են, այդպիսի վեկտորը նշանակում են $\vec{0}$ սիմվոլով:

Ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարություն կամ մոդուլ կոչվում է AB հատվածի երկարությունը և նշանակվում է $|\overrightarrow{AB}|$ կամ $|\vec{a}|$ սիմվոլով: Զրոյական վեկտորի երկարությունը համարվում է հավասար 0-ի՝ $|\vec{0}| = 0$:

Ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են համագիծ (կամ կոլինեար), եթե նրանք գտնվում են կամ նույն ուղղի կամ զուգահեռ ուղիղների վրա: Զրոյական վեկտորը համարվում է ցանկացած վեկտորին համագիծ: Ոչ համագիծ վեկտորները կոչվում են տարագիծ:

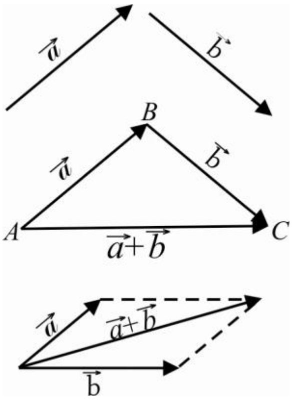
Եթե երկու՝ ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա նրանք կարող են ուղղված լինել կամ միանման կամ հակադիր: Առաջին դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կոչվում են համուղղված և գրում են $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, իսկ երկրորդ դեպքում՝ հակուղղված՝ $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$:





Զրոյական վեկտորը համարվում է ցանկացած վեկտորին համուղղված: Վեկտորները կոչվում են հավասար, եթե նրանք համուղղված են և նրանց երկարությունները հավասար են՝ $\vec{a} = \vec{b}$, եթե $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ և $|\vec{a}| = |\vec{b}|$: Տարբեր կետերից տեղադրված հավասար վեկտորները հաճախ նշանակում են միևնույն տառով և ասում, որ դրանք նույն վեկտորն են, թեև տեղադրված են տարբեր կետերից:

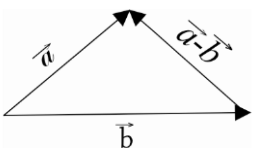
Կամայական երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը սահմանվում է հետևյալ կերպ. տարածության որևէ A կետից տեղադրենք $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը՝ հավա-



սար $\vec{a}$-ին: Այնուհետև B կետից տեղադրենք $\overrightarrow{BC}$ վեկտորը՝ հավասար $\vec{b}$-ին: $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար՝ $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$: Վեկտորների գումարման այս կանոնը կոչվում է եռանկյան կանոն: Երկու տարագիծ վեկտորները կարելի է գումարել նաև զուգահեռագծի կանոնով: (նկ. 1):

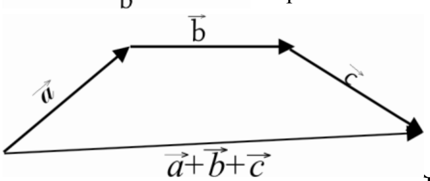
Նկ. 1

Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$: Երկու ոչ զրոյական վեկտորներ կոչվում են հակադիր, եթե նրանց երկարությունները հավասար են և նրանք հակուղղված են:



Նկ. 2

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերություն կոչվում է այն վեկտորը, որի գումարը $\vec{b}$ վեկտորի հետ հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին՝ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (նկ. 2):



Նկ. 3

Մի քանի վեկտորների գումարը սահմանվում է այսպես՝ նախ առաջին վեկտորը գումարվում է երկրորդին, այնուհետև ստացված վեկտորը երրորդին և այլն (նկ. 3):

Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է այն $\vec{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $|k|\cdot|\vec{a}|$, ընդ որում՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են՝ $k\geq 0$ դեպքում և հակուղղված են՝ $k<0$ դեպքում: Զրոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալ համարվում է զրոյական վեկտորը: $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակվում է $k\cdot\vec{a}$:

Ցանկացած $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների և ցանկացած k,l թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$(k\cdot l)\cdot\vec{a}=k\cdot(l\cdot\vec{a})$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{b}$, $(k+l)\cdot\vec{a}=k\cdot\vec{a}+l\cdot\vec{a}$:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են և $\vec{a}\neq 0$, գոյություն ունի այնպիսի k թիվ, որ $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$:

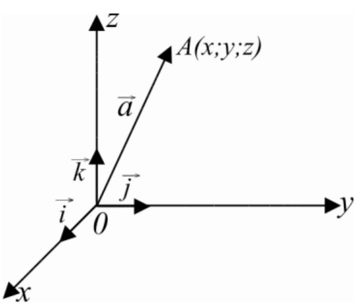
Հարթության մեջ ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ երկու տարագիծ (ոչ կոլինեար) վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միակ ձևով. այսինքն գոյություն ունեն միակ x և y թվեր այնպես, որ $\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$:

Տարածության մեջ վեկտորները կոչվում են <u>համահարթ</u> (կոմպլանար), եթե գոյություն ունեն դրանց հավասար վեկտորներ, որոնք ընկած են մի հարթության մեջ: Ոչ համահարթ վեկտորները կոչվում են <u>տարահարթ</u>:

Եթե $\vec{c}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, այսինքն կարելի է ներկայացնել $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, տեսքով, որտեղ α-ն և β-ն որևէ թվեր են, ապա $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

Տարածության մեջ ցանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երեք տարահարթ վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միակ ձևով:

<u>Վեկտորի կոորդինատները.</u> Տարածության մեջ ներմուծենք Oxyz կոորդինատային ուղղանկյուն համակարգ: Դրական կիսառանցքներից յուրաքանչյուրի վրա կոորդինատների սկզբնակետից տեղադրենք <u>միավոր վեկտոր</u>, այսինքն՝ վեկտոր, որի երկարությունը հավասար է 1-ի: Աբսցիսների առանցքի միավոր վեկտորը նշանակենք $\vec{i}$-ով, օրդինատների առանցքի միավոր վեկտորը՝ $\vec{j}$-ով, ապլիկատների առանցքի միավոր վեկտորը՝ $\vec{k}$-ով: Քանի որ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ վեկտորները տարահարթ են, ապա տարածության ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր միակ ձևով կարելի է վերածել ըստ այդ կոորդինատային վեկտորների, այսինքն ներկայացնել $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ տեսքով: x, y, z թվերը կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներ տրված կոորդինատային համակարգում և դա գրառվում է այսպես՝ $\vec{a}\{x; y; z\}$: Մասնավորապես՝ $\vec{i}\{1;0;0\}$, $\vec{j}\{0;1;0\}$, $\vec{k}\{0;0;1\}$:



1. Զրոյական վեկտորի բոլոր կոորդինատները 0 են:

2. Հավասար վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են, այսինքն, եթե $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ վեկտորները հավասար են, ապա $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$:

3. Երկու վեկտորների գումարի (տարբերության) կոորդինատները հավասար են այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին (տարբերությանը)՝ $\vec{a} \pm \vec{b}\{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$:

4^0. Ցանկացած α թվի համար՝ $\alpha \cdot \vec{a}\{\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1\}$:

5^0. $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերը միացնող $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$:

6^0. $\vec{a}\{x; y; z\}$ վեկտորի երկարությունը հաշվում է՝

$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ բանաձևով:

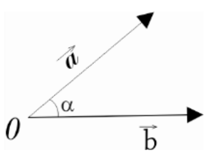
7^0. $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերը միացնող AB հատվածի $C(x, y, z)$ միջնակետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}:$$

8^0. $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերը միացնող AB հատվածի d երկարությունը հաշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}:$$

<u>Վեկտորների սկալյար արտադրյալը.</u> Դիցուք որևէ O կետից տեղադրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են α անկյուն (եթե $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ապա կհամարենք $\alpha = 0^0$):



$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների <u>սկալյար արտադրյալ</u> կոչվում է հետևյալ թիվը՝ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$:

Սկալյար արտադրյալի հատկությունները՝

1. Եթե $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, ապա $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$:
2. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորների կազմած α անկյան կոսինուսը հաշվում է հետևյալ բանաձևով՝
$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}:$$
3. Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների և ցանկացած k թվի համար՝
   ա) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, ընդ որում, եթե $\vec{a} \neq 0$, ապա $\vec{a}^2 > 0$,
   բ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
   գ) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
   դ) $k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$:

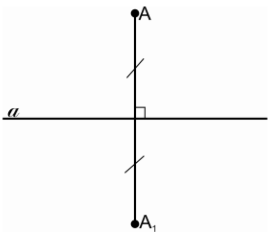
Շրջանագծի հավասարումը. Oxy կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում R շառավղով և $C(x_0;y_0)$ կենտրոնով շրջանագծի հավասարումն է՝ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$:

Ուղիղ գծի հավասարումը. Oxy կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում ուղղի հավասարումը առաջին աստիճանի հավասարում է՝ $ax+by+c=0$, որտեղ a և b թվերից գոնե մեկը 0-ից տարբեր է:

Գնդային մակերևույթի հավասարումը. $Oxyz$ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում R շառավղով և $C(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումն է՝

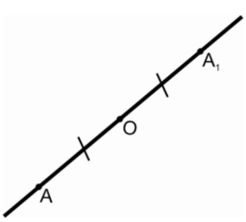
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2:$$

ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ



1. Երկու՝ A և A_1 կետեր կոչվում են a ուղղի նկատմամբ համաչափ (սիմետրիկ), եթե a ուղիղն ուղղահայաց է AA_1 հատվածին և անցնում է նրա միջնակետով: Համարվում է, որ a ուղղի յուրաքանչյուր կետը համաչափ է ինքը իրեն:
2. Պատկերը կոչվում է a ուղղի նկատմամբ համաչափ, եթե այդ պատկերի յուրաքանչյուր կետի՝ a ուղղի նկատմամբ համաչափ կետը ևս պատկանում է այդ պատկերին: Այդ դեպքում a ուղիղն անվանում են պատկերի համաչափության առանցք: Նաև ասում են, որ պատկերն օժտված է առանցքային համաչափությամբ:

ԿԵՆՏՐՈՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ



1. Երկու՝ A և A_1 կետեր կոչվում են O կետի նկատմամբ համաչափ (սիմետրիկ), եթե O-ն AA_1 հատվածի միջնակետն է: Համարվում է, որ O կետը համաչափ է ինքն իրեն:
2. Պատկերը կոչվում է O կետի նկատմամբ համաչափ, եթե այդ պատկերի կետերից յուրաքանչյուրի՝ O կետի նկատմամբ համաչափ կետը ևս պատկանում է այդ նույն պատկերին:

O կետը կոչվում է պատկերի համաչափության կենտրոն: Նաև ասում են, որ պատկերն օժտված է կենտրոնային համաչափությամբ:

A և A_1 կետերը կոչվում են համաչափ α հարթության նկատմամբ, եթե α հարթությունն անցնում է AA_1 հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է այդ հատվածին:

Պատկերը կոչվում է α հարթության նկատմամբ <u>համաչափ,</u> եթե պատկերի ամեն մի կետի α հարթության նկատմամբ համաչափ կետը ևս պատկանում է այդ պատկերին:

ՇԱՐԺՈՒՄՆԵՐ

Դիցուք հարթության յուրաքանչյուր կետի համադրվում է այդ նույն հարթության որևէ կետ, ընդ որում՝ հարթության ամեն մի կետը համադրված է մի որևէ կետի: Այդ դեպքում ասում են, որ տրված է հարթության արտապատկերումն իր վրա:

Առանցքային և կենտրոնային համաչափությունները այդպիսի արտապատկերումների օրինակներ են:

<u>Շարժումը</u> հարթության այնպիսի արտապատկերումն է իր վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները:

Շարժումը կոչվում է նաև <u>վերադրում</u>:

1. Առանցքային և կենտրոնային համաչափությունները շարժում են:
2. Շարժման դեպքում հատվածն արտապատկերվում է հատվածի:
3. Շարժման դեպքում ցանկացած պատկեր արտապատկերվում է իրեն հավասար պատկերի:
4. Շարժման դեպքում հարթության տարբեր կետերը արտապատկերվում են տարբեր կետերի:

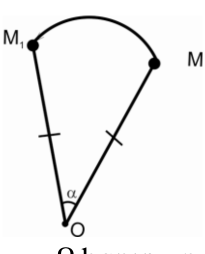
ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄ ԵՎ ՊՏՈՒՅՏ

Դիցուք $\vec{a}$–ն տրված վեկտոր է:

Հարթության արտապատկերումն իր վրա կոչվում է <u>զուգահեռ տեղափոխում</u> $\vec{a}$ վեկտորով, եթե այդ դեպքում յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերվում է մի այնպիսի M_1 կետի, որ MM_1 վեկտորը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին:

<u>Զուգահեռ տեղափոխումը շարժում է</u>.

Հարթության արտապատկերումն իր վրա կոչվում է α անկյունով <u>պտույտ</u> O կետի շուրջը (O-ն և α-ն նախապես տրված են), եթե այդ դեպքում յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերվում է այնպիսի M_1 կետի, որ $OM = OM_1$ և $\angle MOM_1 = \alpha$: Այս դեպքում O կետը մնում է իր տեղում, այսինքն արտապատկերվում է ինքն իր վրա, իսկ մյուս բոլոր կետերը պտտվում են O կետի շուրջը միևնույն անկյունով՝ ժամ. սլաքի պտտման կամ դրա հակառակ ուղղությամբ:



<u>Պտույտը շարժում է</u>:

Դիցուք տարածության յուրաքանչյուր M կետի համադրվում է որևէ M_1 կետ, ընդ որում՝ տարածության ամեն մի M_1 կետ համադրված է մի որևէ M կետի: Այդ դեպքում ասում են, որ տրված է տարածության արտապատկերում իր վրա: Նաև ասում են, որ տրված արտապատկերման դեպքում M կետը փոխադրվում է (արտապատկերվում է) M_1 կետին:

Ասելով տարածության շարժում հասկանում են տարածության այնպիսի արտապատկերումն իր վրա, որի դեպքում ցանկացած երկու՝ A և B կետեր փոխադրվում են որևէ A_1 և B_1 կետերի այնպես, որ $AB = A_1B_1$:

Հայելային համաչափություն (համաչափություն α հարթության նկատմամբ) կոչվում է տարածության այնպիսի արտապատկերումն իր վրա, որի դեպքում ամեն մի M կետ փոխադրվում է α հարթության նկատմամբ իրեն համաչափ M_1 կետին:

Հայելային համաչափությունը շարժում է:

Տարածության ինքն իր վրա արտապատկերումը կոչվում է զուգահեռ տեղափոխում $\vec{p}$ վեկտորով, եթե ցանկացած M կետ փոխադրվում է մի այնպիսի M_1 կետի, որ MM_1 վեկտորը հավասար է $\vec{p}$ վեկտորին:

Զուգահեռ տեղափոխումը շարժում է: