ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Սահմանում
Ուղիղը կոչվում է ուղղահայաց որևէ հարթության, եթե այն ուղղահայաց է այդ հարթության մեջ գտնվող ցանկացած ուղղի:

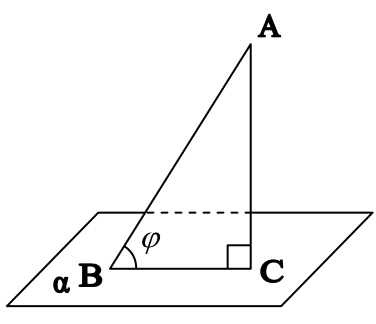
Թեորեմ (Ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշը)
Եթե ուղիղը ուղղահայաց է հարթությանը պատկանող երկու հատվող ուղիղների, ապա այն ուղղահայաց է այդ հարթությանը:

Թեորեմ Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը, ապա իրենք զուգահեռ են, և հակառակը՝ եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը ևս ուղղահայաց է այդ հարթությանը:

Թեորեմ Տարածության ցանկացած կետով անցնում է տրված ուղղին ուղղահայաց հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Թեորեմ Տարածության ցանկացած կետով անցնում է տրված հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Թեք, պրոյեկցիա, ուղղի և հարթության կազմած անկյուն



Դիտարկենք α հարթությունը և A կետը, որն ընկած չէ այդ հարթության մեջ: A կետով տանենք α հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ, այդ ուղղի և α հարթության հատման կետը նշանակենք C-ով: AC հատվածը կոչվում է A կետից α հարթությանը տարված ուղղահայաց, իսկ C կետը՝ ուղղահայացի հիմք:

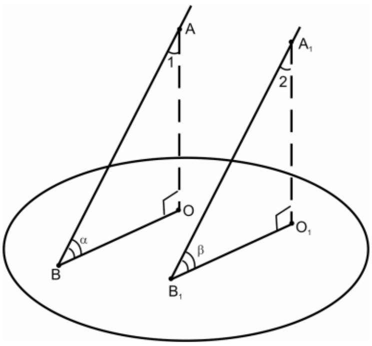
α հարթության մեջ նշենք C-ից տարբեր մի որևէ B կետ և տանենք AB հատվածը: Այն կոչվում է A կետից α հարթությանը տարված թեք, իսկ B-ն՝ թեքի հիմք, BC հատվածը կոչվում է թեքի պրոյեկցիա α հարթության վրա:

Կետի պրոյեկցիա հարթության վրա կոչվում է այդ կետից հարթությանը տարված ուղղահայացի հիմքը՝ եթե կետն ընկած չէ հարթության մեջ, և այդ կետն ինքը, եթե այն ընկած է հարթության մեջ:
Դիցուք F-ը մի որևէ պատկեր է տարածության մեջ: Եթե կառուցենք F պատկերի բոլոր կետերի պրոյեկցիաները տրված հարթության վրա, ապա կստանանք մի F_1 պատկեր, որը կոչվում է F պատկերի պրոյեկցիա տրված հարթության վրա:

Թեորեմ: Ուղղի պրոյեկցիան այդ ուղղին ոչ ուղղահայաց հարթության վրա ուղիղ է:

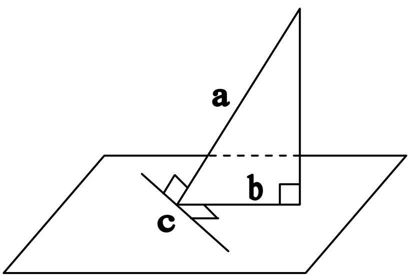
Սահմանում: Ուղղի և այդ ուղիղը հատող ու նրան ոչ ուղղահայաց հարթության կազմած անկյուն կոչվում է այն անկյունը, որ կազմում են ուղիղը և այդ հարթության վրա նրա պրոյեկցիան:

Թեորեմ* Երկու զուգահեռ ուղիղներ նրանց հատող հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը:



Իրոք, դիցուք BO-ն և B_1O_1-ը AB և A_1B_1 զուգահեռ ուղիղների պրոյեկցիաներն են տրված հարթության վրա: $\angle 1 = \angle 2$, որովհետև $AB \| A_1B_1$, իսկ $AO \| A_1O_1$, որովհետև AO-ն և A_1O_1-ը ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը: Ուստի $\alpha = \beta$, որովհետև $\alpha + \angle 1 = \beta + \angle 2 = 90^0$:

Երեք ուղղահայացների թեորեմ



Եթե հարթությանը պատկանող ուղիղը անցնում է թեքի հիմքով և ուղղահայաց է այդ թեքին, ապա նա ուղղահայաց է նաև թեքի պրոյեկցիային և հակառակը:

Սահմանում: Տարածության մեջ երկու ուղիղներ կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք ընկած են մի հարթության մեջ և չեն հատվում:

Թեորեմ Տարածության ցանկացած կետով, որն ընկած չէ տրված ուղղի վրա, անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:

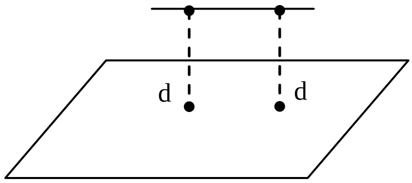
Թեորեմ Եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են երրորդ ուղղին, ապա իրար զուգահեռ են:

Սահմանում

Ուղիղը և հարթությունը կոչվում են զուգահեռ, եթե դրանք չեն հատվում:

Թեորեմ (ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշը)

Եթե հարթությանը չպատկանող ուղիղը զուգահեռ է այդ հարթության որևէ ուղղի, ապա այն զուգահեռ է նաև հենց հարթությանը:



Եթե ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը, ապա ուղղի բոլոր կետերը հավասարահեռ են հարթությունից. դա էլ հենց կոչվում է ուղղի և հարթության հեռավորություն:

(Կետից հարթությանը տարված ուղղահայացի երկարությունը կոչվում է կետի հեռավորություն հարթությունից):

Թեորեմ Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը հատում է տրված հարթությունը, ապա մյուս ուղիղը ևս հատում է այդ հարթությունը:

Թեորեմ Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը զուգահեռ է տրված հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը կամ նույնպես զուգահեռ է այդ հարթությանը, կամ էլ ընկած է դրա մեջ:

Թեորեմ Եթե α և β հարթությունները հատվում են AB ուղղով, իսկ a ուղիղը զուգահեռ է ինչպես α, այնպես էլ β հարթությանը, ապա $a \parallel AB$:

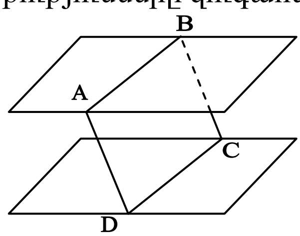
Սահմանում Երկու հարթություններ կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք ընդհանուր կետ չունեն:

Թեորեմ Եթե երկու հարթություններ զուգահեռ են, ապա հարթություններից մեկի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս հարթությունից:

Նրանցից մեկին պատկանող որևէ կետի հեռավորությունը մյուս հարթությունից կոչվում է զուգահեռ հարթությունների հեռավորություն:

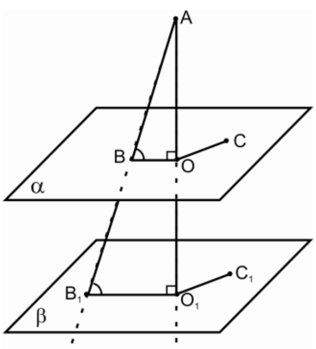
Թեորեմ (երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշը)

Եթե մի հարթության մեջ գտնվող երկու հատվող ուղիղներ զուգահեռ են մյուս հարթության մեջ գտնվող երկու հատվող ուղիղների, ապա այդ հարթությունները զուգահեռ են:



Թեորեմ Եթե մի որևէ հարթություն հատվում է երկու իրար զուգահեռ հարթությունների հետ, ապա առաջացած հատման գծերը իրար զուգահեռ են՝ AB||CD:

Թեորեմ* Ուղիղը նրան հատող երկու զուգահեռ հարթությունների հետ կազմում է նույն անկյունը:



Դիցուք OB-ն AB ուղղի պրոյեկցիան է α հարթության վրա:

α հարթության մեջ դիտարկենք OB-ից տարբեր որևէ OC ուղիղ (AO-ն ուղղահայաց է նաև OC-ին): AO և AB ուղիղներով անցնող հարթությունը կհատի β հարթությունը O_1B_1 ուղղով, որը զուգահեռ է OB-ին և հետևաբար $O_1B_1 \perp AO$: Նույն ձևով AO և AC ուղիղներով անցնող հարթությունը կհատի β-ն O_1C_1 ուղղով, որը զուգահեռ է OC-ին և հետևաբար ուղղահայաց է AO-ին: Ուստի $AO_1 \perp \beta \Rightarrow \angle AB_1O_1$-ը AB և β հարթությունների կազմած անկյունն է: $\angle B = \angle B_1$, որպես համուղղված անկյուններ: Այսպիսով, ցույց տրվեց նաև, որ եթե երկու զուգահեռ հարթություններից մեկն ուղղահայաց է ուղղին, ապա մյուս հարթությունը ևս ուղղահայաց է այդ ուղղին:

Թեորեմ Զուգահեռ ուղիղների այն հատվածները, որոնք առնված են զուգահեռ հարթությունների միջև, հավասար են:

Թեորեմ Եթե երկու հարթություններ ուղղահայաց են միևնույն ուղղին, ապա իրենք զուգահեռ են:

Թեորեմ Եթե հարթությունն անցնում է տրված ուղղով և հատում է մի ուրիշ հարթության, որին զուգահեռ է այդ ուղիղը, ապա հարթությունների հատման գիծը զուգահեռ է տրված ուղղին:

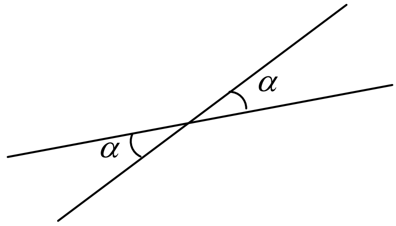
Թեորեմ Եթե ուղիղը հատում է հարթությունը, ապա այն հատում է այդ հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթության:

Թեորեմ Եթե հարթությունը հատում է երկու զուգահեռ հարթություններից մեկը, ապա այն հատում է նաև մյուս հարթությանը:

Թեորեմ* Եթե երկու հարթություններ՝ α-ն և β-ն զուգահեռ են γ հարթությանը, ապա $\alpha \| \beta$:

Ապացույց. Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ α-ն և β-ն հատվում են: Այդ դեպքում կստացվի, որ α-ն հատում է β և γ զուգահեռ հարթություններից մեկը, ապա կհատի նաև մյուսին՝ γ-ն: Իսկ դա հնարավոր չէ, որովհետև $\alpha \| \gamma$:

Թեորեմ Հարթության մեջ չընկած կետով անցնում է այդ հարթությանը զուգահեռ հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:



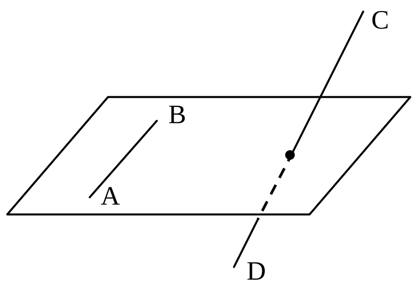
Ցանկացած երկու հատվող ուղիղներ ընկած են մի հարթության մեջ և կազմում են չորս անկյուններ: Դիցուք α-ն այդ անկյուններից այն է, որը չի գերազանցում մյուս երեք անկյուններից ցանկացածին: Այդ դեպքում կասենք, որ հատվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է α-ի:

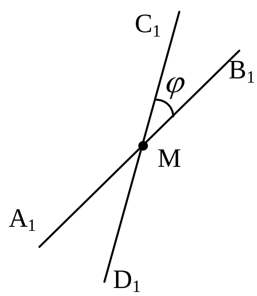
Սահմանում Մի ուղղի վրա չընկած OA և O_1A_1 ճառագայթները կոչվում են համուղղված, եթե նրանք զուգահեռ են և ընկած են OO_1 սահմանագծով կիսահարթություններից մեկում: Մի ուղղի վրա ընկած OA և O_1A_1

ճառագայթները կոչվում են համուղղված, եթե նրանք համընկնում են, կամ նրանցից մեկը ընդգրկում է մյուսը:

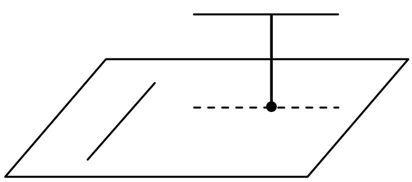
Թեորեմ Եթե երկու անկյունների կողմերը համապատասխանաբար համուղղված են, ապա այդպիսի անկյունները հավասար են:

Սահմանում Այն ուղիղները, որոնք չեն գտնվում միևնույն հարթության մեջ, կոչվում են խաչվող:
Դիցուք AB-ն և CD-ն երկու խաչվող ուղիղներ են: Տարածության կամայական M կետով տանենք AB և CD ուղիղներին համապատասխանաբար զուգահեռ A_1B_1 և C_1D_1 ուղիղները: Եթե A_1B_1 և C_1D_1 ուղիղների կազմած անկյունը φ է, ապա կասենք, որ AB և CD խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է φ:





Թեորեմ Եթե երկու զուգահեռ ուղղուղներից մեկն ուղղահայաց է երրորդ ուղղին, ապա մյուս ուղիղը ևս ուղղահայաց է այդ ուղղին:

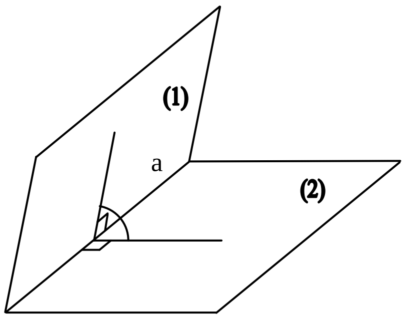


Երկու խաչվող ուղիղներից յուրաքանչյուրով անցնում է մյուս ուղղին զուգահեռ հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը: Նրանցից մեկի հեռավորությունը այն հարթությունից, որն անցնում է մյուս ուղղով և զուգահեռ է առաջին ուղղին, կոչվում է խաչվող ուղիղների հեռավորություն:

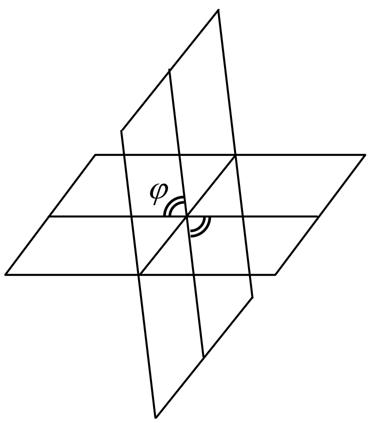
Թեորեմ (խաչվող ուղիղների հայտանիշը) Եթե երկու ուղիղներից մեկն ընկած է որևէ հարթության մեջ, իսկ մյուս ուղիղն այդ հարթությունը հատում է առաջին ուղղի վրա չընկած կետում, ապա այդ ուղիղները խաչվող են:

Թեորեմ Գոյություն ունի միայն մեկ ուղիղ, որը հատում է տրված երկու a և b խաչվող ուղիղները և ուղղահայաց է դրանցից յուրաքանչյուրին:

Երկնիստ անկյուն կոչվում է այն պատկերը, որը կազմված է a ուղղով և երկու այնպիսի կիսահարթություններով, որոնք ունեն a ընդհանուր սահմանագիծ և ընդգրկված չեն մի հարթության մեջ: Այդ կիսահարթությունները կոչվում են երկնիստ անկյան նիստեր, իսկ a-ն՝ կող: AB կող ունեցող երկնիստ անկյունը, որի տարբեր նիստերի վրա նշված են C և D կետեր, համառոտագրելու համար անվանում են CABD երկնիստ անկյուն:



<u>Երկնիստ անկյունը չափվում է</u> հետևյալ կերպ. երկնիստ անկյան կողի վրա վերցնենք կամայական մի կետ և նիստերից յուրաքանչյուրի մեջ այդ կետից տանենք կողին ուղղահայաց ճառագայթ: Այդ երկու ճառագայթներով կազմված անկյունը կոչվում է երկնիստ անկյան գծային անկյուն, իսկ այդ գծային անկյան աստիճանային չափը կոչվում է երկնիստ անկյան աստիճանային չափ: Երկնիստ անկյունը կարող է լինել ուղիղ, սուր կամ բութ:



Երկու հատվող հարթությունները կազմում են ընդհանուր կող ունեցող չորս երկնիստ անկյուններ: Եթե φ-ն այդ չորս անկյուններից այն մեկն է, որը չի գերազանցում մյուս անկյուններից յուրաքանչյուրը, ապա ասում են, որ հատվող հարթությունների կազմած անկյունը φ է: Պարզ է, որ $0^0 < \varphi \leq 90^0$:

Երկու հարթությունների ուղղահայացության հայտանիշը

<u>Սահմանում</u>
<u>Երկու հարթություններ կոչվում են ուղղահայաց</u>, եթե նրանցով կազմած անկյունը 90° է:

<u>Թեորեմ</u>
Եթե հարթությունը անցնում է ուղղով, որը ուղղահայաց է մի ուրիշ հարթության, ապա այդ հարթությունները ուղղահայաց են:

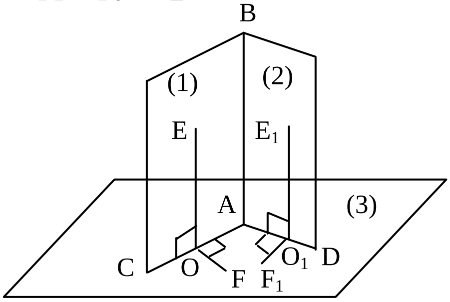
<u>Թեորեմ</u>
Տրված երկու հարթությունների հատման գծին ուղղահայաց հարթությունը ուղղահայաց է այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին:

<u>Թեորեմ</u> Դիցուք c-ն α և β փոխուղղահայաց հարթությունների հատման գիծն է: Այդ դեպքում α հարթության ցանկացած ուղիղ, որն ուղղահայաց է c ուղղին, ուղղահայաց է β հարթությանը:

Թեորեմ Եթե a ուղիղն ուղղահայաց չէ α հարթությանը, ապա գոյություն ունի միակ հարթություն, որն անցնում է a ուղղով և ուղղահայաց է α հարթությանը:

*) Թեորեմ

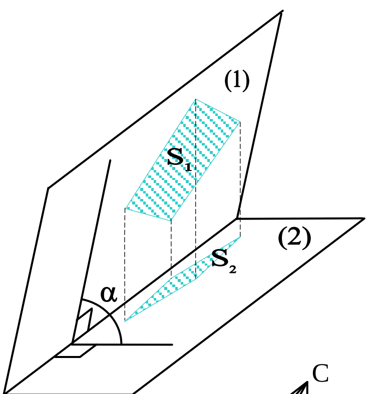
Եթե երկու հատվող հարթությունները ուղղահայաց են երրորդ հարթությանը, ապա նրանց հատման գիծը նույնպես ուղղահայաց է այդ հարթությանը:



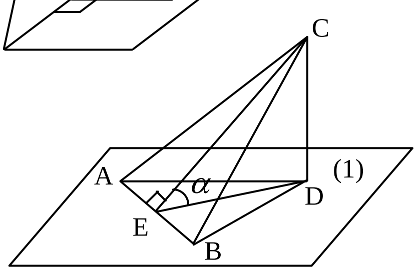
Իրոք, (1) և (3) հարթությունների կազմած անկյունը՝ $\angle EOF = 90^0$, որտեղ $E \in (1), F \in (3)$, $EO \perp AC, FO \perp AC$, $\Rightarrow EO \perp (3)$ ըստ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշի: Նույն ձևով (2) և (3) հարթությունների կազմած անկյունը՝ $\angle E_1O_1F_1 = 90^0 \Rightarrow E_1O_1 \perp (3)$:

Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը, ապա իրար զուգահեռ են $\Rightarrow EO \parallel E_1O_1$:Ուստի $EO \parallel (2)$, ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի: Այսպիսով, (1) հարթությունը անցնում է EO ուղղով, որը զուգահեռ է (2) հարթությանը $\Rightarrow EO$-ն զուգահեռ է այդ հարթությունների հատման գծին՝ $EO \parallel AB$: Իսկ եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը ուղղահայաց է հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը ևս ուղղահայաց է այդ հարթությանը՝ $AB \perp (3)$:

*)*Հարթ պատկերի պրոյեկցիայի մակերեսը*



Եթե (1) և (2) հարթությունները կազմում են α անկյուն և որոշակի բազմանկյուն, որը պատկանում է (1) հարթությանը և ունի S_1 մակերես, պրոյեկտված է (2) հարթության վրա, ապա (*)$S_1 \cdot \cos\alpha = S_2$, որտեղ S_2-ը պրոյեկցիայի մակերեսն է:

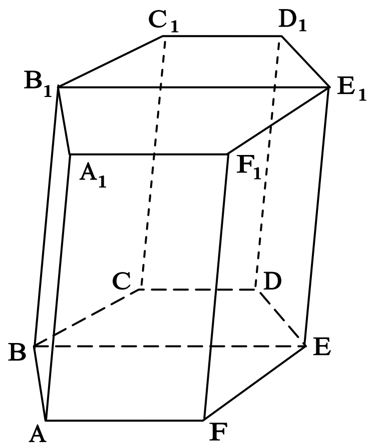


Այս փաստը նախ ապացուցենք եռանկյան համար՝ եթե ΔABD-ն ΔABC-ի պրոյեկցիան է (1) հարթության վրա, ապա $S_{ABC} \cdot \cos\alpha = S_{ABD}$, որտեղ α-ն այդ եռանկյունների հարթությունների կազմած անկյունն է:

Իրոք, դիցուք CE-ն ΔABC-ի C գագաթից տարված բարձրությունն է, իսկ $CD \perp (1)$: Ըստ 3 ուղղահայացների թեորեմի, նրա պրոյեկցիան՝ $ED \perp AB$, այսինքն ED-ն ΔABD-ի բարձրությունն է: Ուստի $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE$, իսկ ΔCED-ից՝ $ED = CE \cdot \cos\alpha \Rightarrow \quad S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot CE \cdot \cos\alpha = S_{ABC} \cdot \cos\alpha$: Իսկ ցանկացած բազմանկյուն տրոհելով եռանկյունների և օգտագործելով արդեն ապացուցվածը, կստանանք (*) բանաձևը բազմանկյան համար:

ՊՐԻԶՄԱ

Բազմանիստը, որը կազմված է զուգահեռ հարթություններում դասավորված երկու հավասար բազմանկյուններից և զուգահեռագծերից կոչվում է պրիզմա: Այդ բազմանկյունները կոչվում են պրիզմայի հիմքեր: Պրիզման կոչվում է n-անկյուն, եթե նրա հիմքերը n-անկյուն բազմանկյուններ են: Նրանցից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է պրիզմայի բարձրություն:



A, A_1, B, B_1,... կետերը կոչվում են պրիզմայի գագաթներ: AA_1, BB_1, և այլն կոչվում են կողմնային կողեր: AA_1FF_1 և այլն կոչվում են կողմնային նիստեր: n-անկյուն պրիզման ունի 3n կող, 2n գագաթ, n+2 նիստ:

Միևնույն նիստին չպատկանող երկու գագաթները միացնող հատվածը կոչվում է պրիզմայի անկյունագիծ:

Այն հատույթը, որը ստացվում է ներքևի և վերևի հիմքերի համապատասխան անկյունագծերով անցնող հարթությամբ կոչվում է պրիզմայի անկյունագծային հատույթ (օրինակ BB_1E_1E):

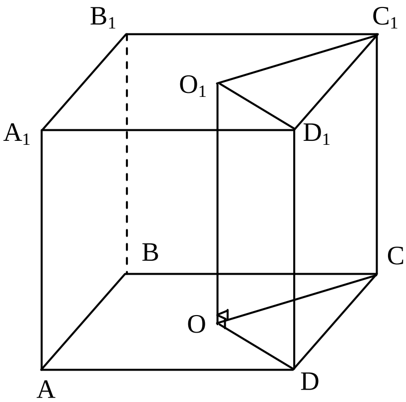
Սահմանում 1

Եթե պրիզմայի կողմնային կողերն ուղղահայաց են հիմքերին, ապա պրիզման կոչվում է ուղիղ պրիզմա:

*) Ուղիղ պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են, որովհետև, եթե զուգահեռագծի անկյունները ուղիղ են, այն կոչվում է ուղղանկյուն:

ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՊՐԻԶՄԱ կոչվում է այն ուղիղ պրիզման, որի հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են: Կանոնավոր պրիզմայի առանցք կոչվում է նրա հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածը:

*) Առանցքը հավասար է կողմնային կողին և ուղղահայաց է պրիզմայի հիմքերին: Իրոք, դիցուք O_1-ը կանոնավոր պրիզմայի հիմքերից մեկի



կենտրոնն է: Այդ կետով մյուս հիմքին տանենք OO_1 ուղղահայացը, այդ դեպքում OO_1C_1C-ն, OO_1D_1D-ն … և այլն կլինեն իրար հավասար ուղղանկյուններ, որովհետև OO_1, CC_1, DD_1 և այլն, պրիզմայի երկու զուգահեռ հիմքերի հեռավորություններն են: Ուստի $OC = O_1C_1$, $OD = O_1D_1 \ldots$: Քանի որ $O_1C_1 = O_1D_1 = \ldots$, ապա $OC = OD = \ldots$, այսինքն O կետը պրիզմայի մյուս հիմքի կենտրոնն է և հետևաբար OO_1-ը պրիզմայի առանցքն է:

Որպեսզի հաշվենք որևէ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը պետք է հաշվել նրա բոլոր կողմնային նիստերի մակերեսները և գումարել (Ուղիղ պրիզմայի համար $S_Կ=p\cdot AA_1$, որտեղ p-ն պրիզմայի հիմքի պարագիծն է, իսկ AA_1-ը պրիզմայի կողմնային կողը):

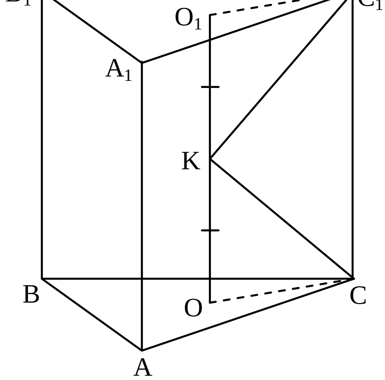
ՊՐԻԶՄԱՅԻ ԼՐԻՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ՝

$S_Լ= S_Կ+2\cdot S_{ՀԻՄՔ}$

ՊՐԻԶՄԱՅԻ ԾԱՎԱԼԸ՝ $V=S\cdot H$ (այսինքն ցանկացած պրիզմայի ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին):

<u>Սահմանում 2</u>

Պրիզմային <u>արտագծած գունդ</u> կոչվում է այն գունդը, որի մակերևույթին պատկանում են պրիզմայի բոլոր գագաթները, իսկ <u>ներգծած գունդ</u> այն գունդը, որը շոշափում է պրիզմայի բոլոր նիստերը:



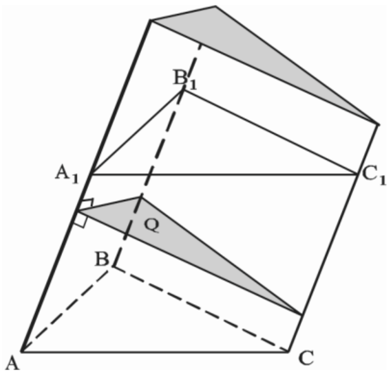
*) Ցանկացած <u>կանոնավոր պրիզմային</u> կարելի է արտագծել գունդ, ընդ որում այդ գնդի կենտրոնը գտնվում է պրիզմայի առանցքի միջնակետում, իսկ շառավիղը գնդի կենտրոնից մինչև պրիզմայի որևէ գագաթը եղած հեռավորությունն է: Նախ պետք է ապացուցել, որ պրիզմայի առանցքն ուղղահայաց է հիմքերին (տես նախորդ պնդումը): Այնուհետև բավական է ցույց տալ, որ առանցքի K միջնակետը հավասարահեռ է պրիզմայի բոլոր գագաթներից:

Ստուգենք, օրինակ, որ $KC = KC_1$: $O_1C_1 = OC$, որպես ABC և $A_1B_1C_1$ իրար հավասար կանոնավոր բազմանկյունների արտագծած շրջանագծերի շառավղեր, $KO_1 = KO$ և $\angle KO_1C_1 = \angle KOC = 90^0$:

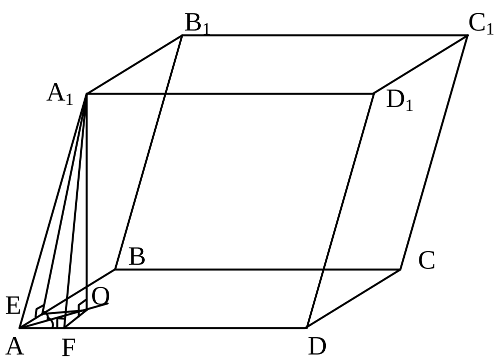
Ուստի $\Delta KOC = \Delta KO_1C_1 \Rightarrow KC = KC_1$:

**) <u>Եթե ուղիղ պրիզմային ներգծած է r շառավղով գունդ</u>, ապա
1) պրիզմայի բարձրությունը (կամ կողմնային կողը) = 2r
2) պրիզմայի հիմքին կարելի է ներգծել r շառավղով շրջանագիծ:

ԹԵՔ ՊՐԻԶՄԱ



Թեք պրիզմա կոչվում է այն բազմանիստը, որի երկու նիստերը իրար զուգահեռ և հավասար բազմանկյուններ են, իսկ մնացած նիստերը զուգահեռագծեր են, այսինքն այդ պրիզմայի կողմնային կողերը ուղղահայաց չեն պրիզմայի հիմքերին:
**) Թեք պրիզմայի ծավալը կարելի է հաշվել նաև հետևյալ բանաձևով՝ $V=Q\cdot AA_1$, որտեղ Q-ն պրիզմայի կողմնային կողերին ուղղահայաց հատույթի մակերեսն է:
Իրոք, այդ ուղղահայաց հատույթը պրիզման տրոհում է երկու մասի: Այդ մասերից մեկը զուգահեռ տեղափոխենք այնպես, որ պրիզմայի հիմքերը համընկնեն: Այդ դեպքում կստանանք ուղիղ պրիզմա, որի հիմքը թեք պրիզմայի ուղղահայաց հատույթն է, իսկ բարձրությունը թեք պրիզմայի կողմնային կողը՝ AA_1-ը: Բայց այդ ուղիղ պրիզման ունի նույն ծավալը, ինչ թեք պրիզման: Ուստի թեք պրիզմայի ծավալը $= Q\cdot AA_1$:

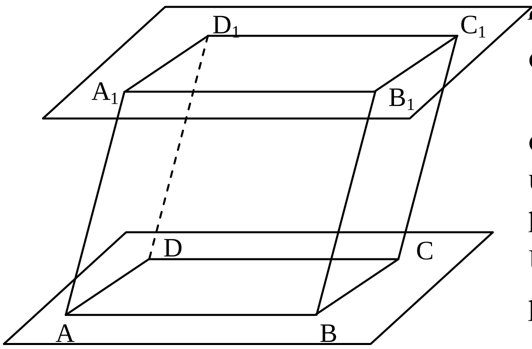


*) <u>Եթե թեք պրիզմայի</u> AA_1 կողը հավասար անկյուններ է կազմում նրա հետ ընդհանուր կետ ունեցող հիմքի երկու կողերի հետ, ապա պրիզմայի A_1 գագաթից տարված բարձրությունը հատում է հիմքի այդ կողերով կազմված անկյան կիսորդը:

<u>Ապացույց</u>. A_1 գագաթից տանենք $A_1O \perp$հիմքին, $A_1E \perp AB$ և $A_1F \perp AD$: Ըստ 3 ուղղահայացների թեորեմի՝ $OE \perp AB$ և $OF \perp AD$: $\Delta A_1AF = \Delta A_1AE$, որպես ուղղանկյուն եռանկյուններ, որոնց AA_1 ներքնաձիգը ընդհանուր է և $\angle A_1AF = \angle A_1AE$ ըստ պայմանի:
Ուստի $A_1E = A_1F$ և $\Delta A_1EO = \Delta A_1FO$ որպես երկու հավասար կողմեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ (A_1O-ն ընդհանուր է): Այստեղից՝

$OE = OF$, այսինքն O կետը հավասարահեռ է $\angle BAD$-ի կողմերից՝ ուստի գտնվում է այդ անկյան կիսորդի վրա:

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏ



Դիտարկենք երկու հավասար զուգահեռագծեր՝ $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$, որոնք դասավորված են զուգահեռ հարթությունների մեջ այնպես, որ AA_1, BB_1, CC_1 և DD_1 հատվածները զուգահեռ են: Ստացված $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ մակերևույթը կոչվում է <u>զուգահեռանիստ</u>:

Այն կազմված է 6 զուգահեռագծերից, որոնք կոչվում են <u>զուգահեռանիստի նիստեր</u>, դրանց կողմերը՝ <u>զուգահեռանիստի կողեր</u>, իսկ գագաթները՝ <u>զուգահեռանիստի գագաթներ</u>:

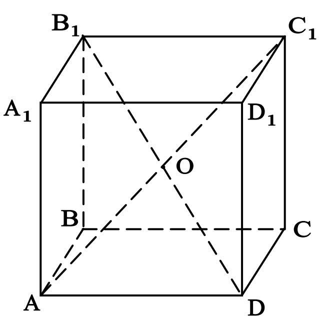
Զուգահեռանիստի հատույթը կոչվում է անկյունագծային, եթե այն ընդգրկում է նրա որևէ անկյունագիծ և կողմնային կող:

Զուգահեռանիստի երկու նիստերը, որոնք ունեն ընդհանուր կող, կոչվում են <u>կից</u>, իսկ ընդհանուր կող չունեցող նիստերը՝ <u>հանդիպակաց</u>:

Հատկությունները՝

1) Զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերը զուգահեռ են և հավասար:
2) Զուգահեռանիստի չորս անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏ (ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՆԻՍՏ)



<u>Սահմանում 3</u>

Զուգահեռանիստը, որի բոլոր կողմնային կողերը ուղղահայաց են հիմքին և հիմքերը ուղղանկյուններ են, կոչվում է <u>ուղղանկյունանիստ</u> (կամ ուղղանկյուն զուգահեռանիստ):

<u>Հատկություններ՝</u>

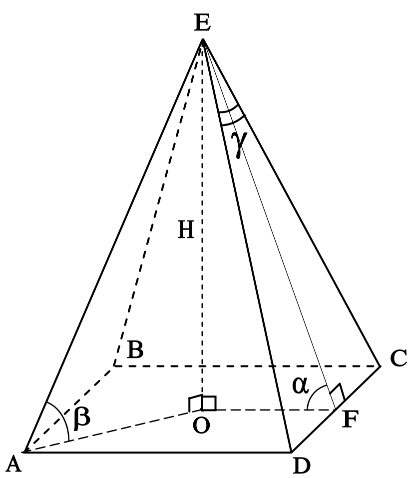
1) Ուղղանկյունանիստի բոլոր վեց նիստերը ուղղանկյուններ են:
2) Նրա բոլոր անկյունագծերը իրար հավասար են, հատվում են մի կետում և այդ կետում կիսվում:
3) $B_1D^2=AD^2+AB^2+BB_1^2$ (անկյունագծի քառակուսին հավասար է երեք չափումների քառակուսիների գումարին):

4) $V=AD\cdot AB\cdot BB_1$ (ծավալը հավասար է երեք չափումների արտադրյալին):
5) Կողմնային մակերևույթի մակերեսը` $S_Կ=2AD\cdot AA_1+2AB\cdot AA_1$
6) Լրիվ մակերևույթը $S_Լ=S_Կ+2S_Հ$, որտեղ $S_Հ$–ը ABCD հիմքի մակերեսն է:
7) Արտագծած գնդի կենտրոնը գտնվում է անկյունագծերի հատման կետում, իսկ այդ գնդի շառավիղը հավասար է $\frac{1}{2}AC_1$, որովհետև O-ն հավասարահեռ է բոլոր գագաթներից:

Այն ուղղանկյունանիստը, որի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են կոչվում է խորանարդ:
Խորանարդին արտագծած կամ ներգծած գնդի կենտրոնը գտնվում է նրա անկյունագծերի հատման կետում $r_Ն=\frac{a}{2}$, $R_Ա=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, որտեղ a-ն խորոնարդի կողի երկարությունն է:
$V=a^3$, $S_Կ=4a^2$, $S_Լ=6a^2$:

Սահմանում 4
Ուղիղ պրիզման, որի հիմքերը զուգահեռագծեր են, կոչվում է ուղիղ զուգահեռանիստ:

ԲՈՒՐԳ



Բուրգ կոչվում է այն բազմանիստը, որը կազմված է մի հարթ բազմանկյունից (որը կոչվում է բուրգի հիմք) և ընդհանուր գագաթ ունեցող եռանկյուններից, որոնց հիմքերը այդ բազմանկյան կողմերն են: Բուրգի գագաթը բազմանկյան գագաթներին միացնող հատվածները (օրինակ AE, DE) կոչվում են բուրգի կողմնային կողեր: ΔAEB-ն, ΔDEC-ն և այլն կոչվում են կողմնային նիստեր: Բուրգի բարձրություն կոչվում է բուրգի գագաթից հիմքի հարթությանն իջեցված ուղղահայացը: Բուրգը կոչվում է n-անկյուն բուրգ, եթե նրա հիմքում գտնվում է n-անկյուն բազմանկյուն:
Եռանկյուն բուրգը կոչվում է նաև քառանիստ: n-անկյուն բուրգն ունի 2n կող, որոնցից n-ը հիմքի կողեր են, n-ը կողմնային կողերը: Այդպիսի բուրգն ունի n+1 գագաթ և n+1 նիստ:

Բուրգի գագաթից (E-ից) տարած կողմնային նիստի բարձրությունը կոչվում է հարթագիծ (օրինակ EF-ը):

α-ն կոչվում է DEC կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյուն կամ հիմքի կողմին (DC-ին) առընթեր երկնիստ անկյուն (դա փաստորեն հարթագծի և հիմքի հարթության կազմած անկյունն է):

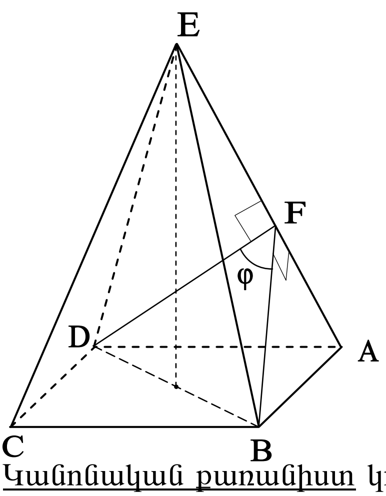
β-ն կոչվում է բուրգի կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյուն:

γ-ն կոչվում է բուրգի գագաթի հարթ անկյուն (կամ գագաթին հարակից հարթ անկյուն):

ΔAEC – կոչվում է անկյունագծային հատույթ (իսկ կանոնավոր բուրգի մեջ առանցքային հատույթ):

Բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հաշվելու համար, պետք է առանձին-առանձին հաշվել կողմնային նիստեր հանդիսացող եռանկյուննե-րի մակերեսները և գումարել:

Լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ $S_Լ=S_Կ+S_Հ$, որտեղ $S_Հ$-ն հիմքի մակերեսն է:

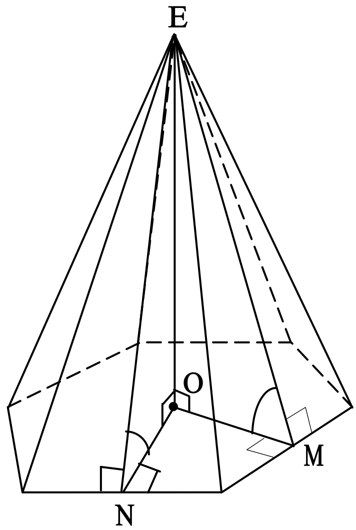


Ծավալը՝ $V=\frac{1}{3}\cdot S_Հ \cdot H$, որտեղ H-ը բուրգի բարձրությունն է:

Բուրգը կոչվում է կանոնավոր, եթե նրա հիմ-քը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ բարձ-րությունը անցնում է հիմքի կենտրոնով (դա փաստորեն կլինի հիմքին ներգծած կամ արտագծած շրջանագծերի կենտրոնը):

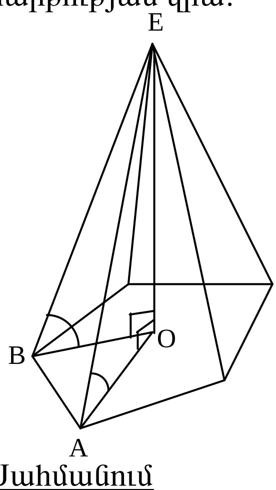
Կանոնական քառանիստ կոչվում է այն քառանիստը, որի բոլոր նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են:
Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են, իսկ կողմնային նիստերը միմյանց հավասար հավասարասրուն եռանկյուններ են: Կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հարթագծի և հիմքի պարագծի արտադրյալի կեսին:
*) Կանոնավոր բուրգի AE կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը BEA և DEA նիստերով կազմված անկյունն է, այդ անկյունը կառուցելու համար տանենք $BF \perp AE$ և F կետը միացնենք D-ի հետ: $\Delta BFA = \Delta DFA$, քանի որ $BA = DA, AF$-ը ընդհանուր է, $\angle FAB = \angle FAD$: Ուստի

$\angle DFA = \angle BFA = 90^0$, այսինքն $DF \perp AE$ և հետևաբար DF և BF հատվածներով կազմված φ անկյունը AE կողին առընթեր երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:



*) Եթե որևէ բուրգի բոլոր <u>կողմնային նիստերը</u> բուրգի հիմքի հետ կազմում են միևնույն անկյուն, ապա այդ բուրգի բարձրությունը (եթե այն հատվում է հիմքի բազմանկյան հետ) կանցնի <u>հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով</u>: Նույն բանը տեղի կունենա, երբ բուրգի հարթագծերը իրար հավասար են, կամ բուրգի բարձրության հետ կազմում են նույն անկյունը:

Իրոք, բոլոր նշված դեպքերում բուրգի EO բարձրության O հիմքը հավասարահեռ է հիմքի բազմանկյան բոլոր կողմերից, որովհետև EOM և EON ուղղանկյուն եռանկյունները կլինեն իրար հավասար ⇒ OM=ON: Իսկ OM և ON-ը ուղղահայաց են բազմանկյան համապատասխան կողմերին՝ ըստ 3 ուղղահայացների թեորեմի, որովհետև OM-ը EM հարթագծի, իսկ ON-ը EN հարթագծի պրոյեկցիան է հիմքի հարթության վրա:



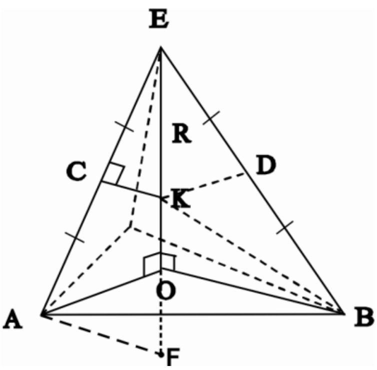
*) Եթե որևէ բուրգի <u>բոլոր կողմնային կողերը</u> հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը, ապա բուրգի բարձրությունը կանցնի <u>հիմքին արտագծած շրջանագծի կենտրոնով</u>: Նույն բանը տեղի կունենա, երբ բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են, կամ բուրգի բարձրության հետ կազմում են միևնույն անկյունը:

Իրոք, բոլոր նշված դեպքերում բուրգի բարձրության O հիմքը հավասարահեռ է հիմքի բազմանկյան բոլոր գագաթներից, որովհետև EOB և EOA ուղղանկյուն եռանկյունները իրար հավասար են⇒ OB=OA:

<u>Սահմանում</u>

Բուրգին <u>արտագծած գունդ</u> կոչվում է այն գունդը, որի մակերևույթին պատկանում են բուրգի բոլոր գագաթները:

Եթե որևէ բազմանիստի հնարավոր է արտագծել գունդ, ապա ըստ արտագծած գնդի սահմանման, նրա բոլոր նիստերին հնարավոր է արտագծել շրջանագիծ: Ուստի արտագծած գնդի կենտրոնը կգտնվի այդ բազմանիստի որևէ <u>երկու ոչ զուգահեռ նիստերի արտագծած շրջանների կենտրոններով անցնող և այդ նիստերին ուղղահայաց ուղիղների հատման կետում</u> (ըստ գնդի հատույթների հատկության):



*) <u>Կանոնավոր բուրգին</u> արտագծած գնդի կենտրոնը գտնվում է նրա կողմնային կողի միջնուղղահայացի և բուրգի բարձրությունը պարունակող ուղղի հատման կետում:

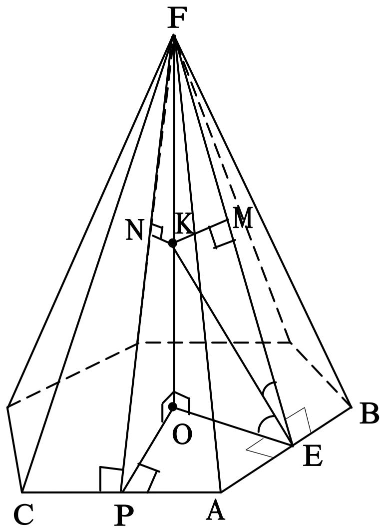
Իրոք, դիցուք K-ն AE-ի միջնուղղահայացի և EO-ն պարունակող ուղղի հատման կետն է:

Ցույց տանք, որ K-ն հավասարահեռ է բուրգի գագաթներից: Միացնենք K կետը EB հատվածի D միջնակետի հետ: Քանի որ բուրգը կանոնավոր է, ապա $\Delta AEO = \Delta EOB$ (AE=EB, EO-ն ընդհանուր է AO=OB, որպես հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավղեր), $\Rightarrow \angle AEO = \angle OEB$, ուստի $\Delta CEK = \Delta KED$ (ըստ եռանկյունների հավասարության 1-ին հայտանիշի) $\Rightarrow$ $\angle KDE = \angle KCE = 90^0$, այսինքն KD-ն EB հատվածի միջնուղղահայացն է, $\Rightarrow$ KB=KE:
Որոշ խնդիրներում բավական է ցույց տալ, որ կանոնավոր բուրգին արտագծած գնդի K կենտրոնը գտնվում է բուրգի բարձրությունը պարունակող ուղղի վրա. դա կարելի է ապացուցել, օրինակ, այսպես՝

K կետի պրոյեկցիան հիմքի հարթության վրա ն2. O_1: $\Delta KO_1A = KO_1B = \ldots$, որովհետև KO_1-ը ընդհանուր է և $KA = KB \Rightarrow$ $\Rightarrow O_1A = O_1B = \ldots$, ուստի O_1-ը հիմքին արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է $\Rightarrow$ O_1-ը համընկնում է O-ի հետ: Այսպիսով, գնդի կենտրոնը գտնվում է բուրգի բարձրությունը պարունակող ուղղի վրա:
Գունդը կարելի է չնկարել, միայն ցույց տալ գնդի կենտրոնը (K-ն) և շառավիղը՝ KE-ն: Նշենք, որ բուրգին արտագծած գնդի հետ կապված խնդիրներում հարմար է օգտվել ուղղանկյուն եռանկյուն AEO-ից, որտեղ AC=CE, CK⊥AE, EK-ն գնդի շառավիղն է և $\Delta ECK \backsim \Delta AOE$:
Կարելի է օգտվել նաև այն փաստից, որ ΔEAF-ը, որտեղ EF-ը գնդի տրամագիծն է, ուղղանկյուն եռանկյուն է, իսկ AO-ն ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը:
Բուրգին արտագծած գնդի կենտրոնը կարող է գտնվել նաև բուրգից դուրս:
<u>Սահմանում</u> Եթե գնդի մակերևույթը շոշափում է բուրգի բոլոր նիստերը, ապա այդ գունդը կոչվում է <u>բուրգին ներգծած գունդ:</u>

*) <u>Կանոնավոր բուրգին</u> ներգծած գնդի կենտրոնը գտնվում է FEO անկյան կիսորդի և բուրգի բարձրության հատման կետում, որտեղ $\angle$FEO-ն հիմքի կողմին առընթեր երկնիստ անկյունն է:

Իրոք, դիցուք K-ն $\angle FEO$-ի կիսորդի և FO բարձրության հատման կետն է: Ցույց տանք, որ K-ն հավասարահեռ է բուրգի բոլոր նիստերից: Տանենք $KM \perp EF$ հարթագծին: Քանի որ $AB \perp OE$ և $AB \perp EF$, ապա $AB \perp OEF$

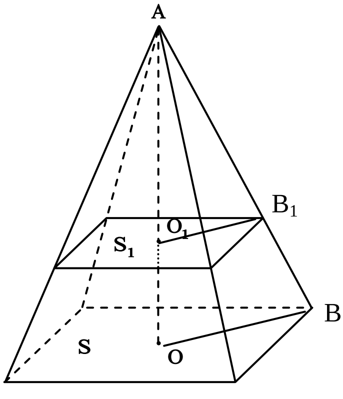


հարթությանը և հետևաբար այդ հարթությանը պատկանող ցանկացած ուղղի, մասնավորապես $AB \perp KM$: Այսպիսով, $KM \perp AB$ և $KM \perp EF$, այսինքն $KM \perp AFB$ հարթությանը $\Rightarrow$ K կետը հավասարահեռ է, AFB նիստից և բուրգի հիմքից, որովհետև ըստ անկյան կիսորդի հատկության՝ OK=KM: Մնում է ցույց տալ, որ K կետի հեռավորությունը բուրգի ցանկացած այլ նիստից նույնպես հավասար է OK: Տանենք AFC նիստի FP հարթագիծը և K կետից տանենք նրան ուղղահայաց՝ $KN \perp FP$: Նախորդ դեպքի նման կստանանք, որ $KN \perp CFA$ հարթությանը: $\Delta OFP = \Delta OFE,$ որպես հավասար էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ, ուստի $\angle PFO = \angle EFO \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta NFK = \Delta KFM$ որպես հավասար անկյուններ և ընդհանուր KF ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ: Այստեղից՝ KN=KM, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

Գունդը կարելի է չնկարել, այլ միայն ցույց տալ նրա K կենտրոնը և KO շառավիղը: Նշենք, որ բուրգին ներգծած գնդի հետ կապված խնդիրներում հարմար է օգտվել ուղղանկյուն եռանկյուն FOE-ից, որտեղ KE-ն E անկյան կիսորդն է, K-ն գնդի կենտրոնը, KO-ն գնդի շառավիղը, ընդ որում ըստ կիսորդի հատկության՝ $\frac{FK}{KO} = \frac{EF}{EO}$:

**)Եթե որևէ բուրգի հնարավոր է ներգծել գունդ, ապա այդ գնդի շառավիղը կարելի է հաշվել նաև հետևյալ բանաձևով՝ $r = \frac{3 \cdot V}{S_L}$, որտեղ V-ն բուրգի ծավալն է, իսկ S_L-ն՝ լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

Բուրգի հիմքին զուգահեռ հատույթների հատկությունները

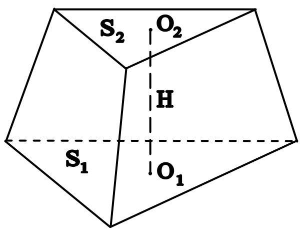


Ցանկացած բուրգի մեջ նրա հիմքին զուգահեռ հատույթների մակերեսները հարաբերում են ինչպես բուրգի գագաթից նրանց ունեցած հեռավորությունների քառակուսիները, իսկ բուրգերի ծավալները ինչպես նրանց խորանարդները՝

1) $\frac{S_1}{S}=\frac{AO_1^2}{AO^2}$; 2) $\frac{V_1}{V}=\frac{AO_1^3}{AO^3}$ (ստացվում է 1)-ի 2 կողմը բազմապատկելով $\frac{AO_1}{AO}$ -ով):

*) Քանի որ $\Delta AO_1B_1 \backsim \Delta AOB$, ապա 1) և 2) հավասարությունների աջ մասերը կարելի է փոխարինել համապատասխանաբար $\frac{AB_1^2}{AB^2}$ և $\frac{AB_1^3}{AB^3}$ -ով:

ՀԱՏԱԾ ԲՈՒՐԳ



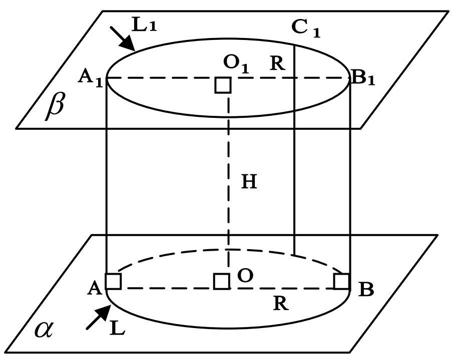
Սահմանում

Որևէ բուրգի հիմքին զուգահեռ և նրան հատող երկու հարթությունների միջև գտնվող մարմինը կոչվում է հատած բուրգ (ընդ որում այդ հատույթներից մեկը կարող է լինել բուրգի հիմքը):

Հատած բուրգի հիմքերից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է հատած բուրգի բարձրություն:

Հատած բուրգը <u>կոչվում է կանոնավոր</u>, եթե այն ստացվել է կանոնավոր բուրգից՝ հիմքին զուգահեռ հարթությամբ հատելիս:
Հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա կողմնային նիստեր հանդիսացող սեղանների մակերեսների գումարին:
Հատած բուրգի ծավալը՝ $V=\frac{1}{3}\cdot H\cdot\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2}\right)$, որտեղ H-ը հատած բուրգի բարձրությունն է, իսկ S_1-ը և S_2 -ը նրա հիմքերի մակերեսները:

Գունդը կոչվում է հատած բուրգին ներգծված, եթե այն շոշափում է նրա բոլոր նիստերը: Գունդը կոչվում է հատած բուրգին արտագծված, եթե հատած բուրգի բոլոր գագաթները գտնվում են գնդային մակերևույթի վրա:



ԳԼԱՆ

<u>Սահմանում</u> Դիտարկենք α և β երկու զուգահեռ հարթությունները և α հարթության մեջ ընկած L շրջանագիծը, որի շառավիղը R է և կենտրոնը O կետն է: L շրջանագծի յուրաքանչյուր կետով տանենք α հարթությանն ուղղահայաց

ուղիղ: Այդ ուղիղների այն հատվածները, որոնք գտնվում են α և β հարթությունների միջև, կազմում են գլանային մակերևույթ: Իսկ այդ հատվածները կոչվում են գլանային մակերևույթի ծնորդներ (Օրինակ՝ AA_1-ը, BB_1-ը, CC_1-ը և այլն):

Ըստ կառուցման՝ ծնորդների մեկական ծայրակետերը, որոնք ընկած են α հարթության մեջ, ամբողջապես լրացնում են L շրջանագիծը: Ծնորդների մյուս ծայրակետերը, որոնք ընկած են β հարթության մեջ, լրացնում են R շառավղով մի L_1 շրջանագիծ: Այդ շրջանագծի O_1 կենտրոնը β հարթության հատման կետն է այն ուղղի հետ, որն անցնում է O կետով և ուղղահայաց է α հարթությանը:

Մարմինը, որը սահմանափակված է գլանային մակերևույթով և L, L_1 շրջանագծերի եզերած երկու շրջաններով, կոչվում է գլան: Գլանային մակերևույթը կոչվում է գլանի կողմնային մակերևույթ, իսկ շրջանները կոչվում են գլանի հիմքեր: Գլանային մակերևույթի ծնորդները կոչվում են գլանի ծնորդներ, OO_1 ուղիղը՝ գլանի առանցք:

Գլանի բոլոր ծնորդները զուգահեռ են և միմյանց հավասար:

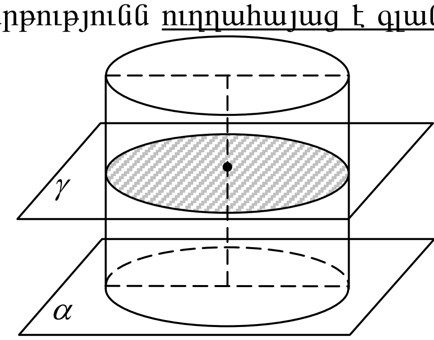
Ծնորդների երկարությունը կոչվում է գլանի բարձրություն, իսկ հիմքի շառավիղը՝ գլանի շառավիղ:

Գլան կարելի է ստանալ՝ պտտելով ուղղանկյունը իր կողմերից մեկի շուրջը:

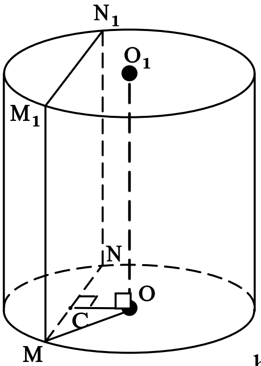
Դիտարկենք գլանի հատույթները տարբեր հարթություններով՝

*) 1. Եթե հատող հարթությունն անցնում է գլանի առանցքով, ապա ստացված հատույթը կոչվում է գլանի առանցքային հատույթ: Դա ուղղանկյուն է, որի կողմերից երկուսը գլանի ծնորդներն են, իսկ մյուս երկուսը՝ հիմքերի տրամագծերը: Իրոք, քանի որ այդ հարթությունը հատում է α և β զուգահեռ հարթությունները, ապա առաջացած հատման գծերը կլինեն զուգահեռ: իսկ քանի որ այդ գծերը անցնում են O և O_1 կետերով, ապա դրանք գլանի հիմքերը կհատեն AB և A_1B_1 տրամագծերով: Այստեղից հետևում է, որ AA_1O_1O քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որովհետև նրա հանդիպակաց կողմերը՝ A_1O_1 և AO-ն զուգահեռ են և հավասար: Ուրեմն՝ $AA_1 \parallel OO_1$ և քանի որ $OO_1 \perp \alpha$, ապա $AA_1 \perp \alpha$, ուստի AA_1-ը գլանի ծնորդն է: Նույն ձևով ցույց է տրվում BB_1-ի ծնորդ լինելը:

2. Եթե հատող հարթությունն ուղղահայաց է գլանի առանցքին, ապա հատույթը շրջան է:

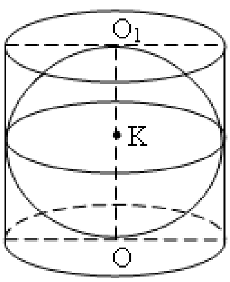


*) 3. Գլանի OO_1 առանցքին զուգահեռ հարթությունը գլանի կողմնային մակերևույթը հատում է գլանի ծնորդներով և հետևաբար առաջացած հատույթը ուղղանկյուն է:



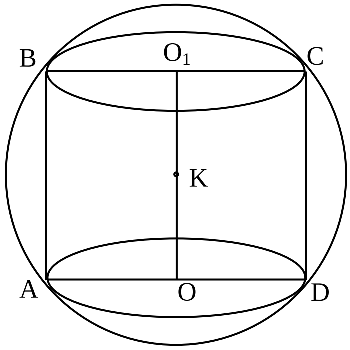
Ապացույց Դիցուք MN-ը OO_1-ին $\|\alpha$ հարթության և գլանի հիմքի հատման գիծն է: M և N կետերով տանենք գլանի MM_1 և NN_1 ծնորդները, կստացվի MM_1N_1N ուղղանկյունը, որի հարթությունը զուգահեռ է OO_1-ին, (քանի որ $MM_1\|OO_1$): Քանի որ MN և OO_1 խաչվող ուղիղներից մեկով (MN-ով) անցնում է մյուսին զուգահեռ միայն մեկ հարթություն, ապա MM_1N_1N հարթությունը համընկնում է α հարթության հետ: $OC\perp MN$ հատվածը կլինի OO_1-ի և MM_1N_1N հարթության հեռավորությունը, որովհետև $OC\perp MM_1 \Rightarrow OC\perp MM_1N_1N$:

Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $S_կ=2\pi RH$
Գլանի լրիվ մակերևույթը՝ $S_լ=S_կ+2S_հ=2\pi RH+2\pi R^2$



Գլանի ծավալը՝ $V=\pi R^2H$
Պրիզման կոչվում է գլանին ներգծված, եթե նրա հիմքերի բազմանկյունները ներգծված են գլանի հիմքերի շրջանագծերին:
Պրիզման կոչվում է արտագծված գլանին, եթե նրա հիմքերի բազմանկյունները արտագծված են գլանի հիմքերի շրջանագծերին:
Գնդային մակերևույթը կոչվում է ներգծված գլանին, եթե գնդի մակերևույթը շոշափում է գլանի հիմքերը և նրա յուրաքանչյուր ծնորդը:
*) Ցույց տանք, որ եթե գլանին հնարավոր է ներգծել գունդ, ապա այդ գնդի կենտրոնը գտնվում է գլանի առանցքի միջնակետում: Իրոք, եթե գնդի կենտրոնով տանենք գլանի առանցքին ուղղահայաց հատույթ, ապա այդ հարթությունը, ինչպես գիտենք, գլանը կհատի հիմքերին զուգահեռ շրջանով, իսկ գունդը՝ նրա մեծ շրջանով և այդ շրջանները կհամընկնեն, այլապես գունդը չէր շոշափի գլանի բոլոր ծնորդները:

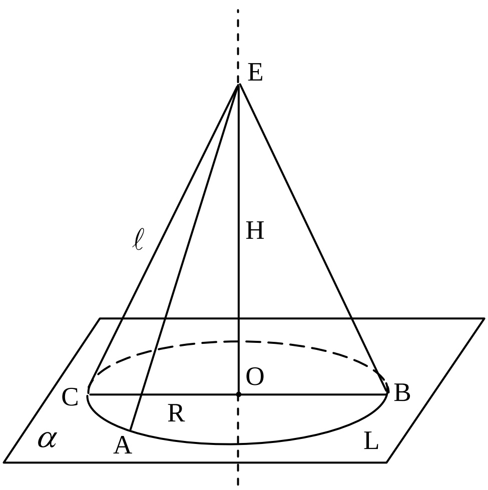
Գլանը կոչվում է ներգծված գնդային մակերևույթին, եթե գլանի հիմքերը գնդային մակերևույթի հատույթներն են:
*) Այս սահմանումից հետևում է, որ գլանին արտագծած գնդի կենտրոնը գտնվում է նրա առանցքի OO_1 հատվածի միջնակետում, որովհետև գնդի ցանկացած հատույթը շրջան է, որի կենտրոնում շրջանի հարթությանը



տարված ուղղահայացը անցնում է գնդի կենտրոնով, այսինքն գնդի K կենտրոնը գտնվում է գլանի OO_1 առանցքի վրա:

Այստեղից հետևում է, որ գլանի ABCD առանցքային հատույթի հարթությունը գունդը հատում է նրա մեծ շրջանով, այսինքն գնդի կենտրոնը համընկնում է ABCD ուղղանկյանը արտագծած շրջանի կենտրոնի հետ, իսկ դա OO_1-ի միջնակետն է:

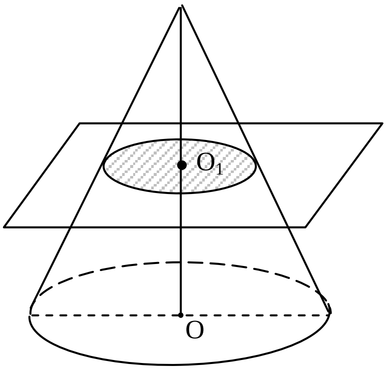
ԿՈՆ



Դիտարկենք O կենտրոնով L շրջանագիծը և OE ուղիղը, որն ուղղահայաց է այդ շրջանագծի հարթությանը: Շրջանագծի յուրաքանչյուր կետը հատվածով միացնենք E կետին: Այդ հատվածներով առաջացած մակերևույթը կոչվում է <u>կոնային մակերևույթ</u>, իսկ իրենք՝ հատվածները կոչվում են կոնային մակերևույթի ծնորդներ (օրինակ AE-ն, BE-ն և այլն): Մարմինը, որը սահմանափակված է կոնային մակերևույթով և L շրջանագծի եզերած շրջանով կոչվում է <u>կոն</u>: Կոնային մակերևույթը կոչվում է <u>կոնի կողմնային մակերևույթ</u>, իսկ շրջանը՝ <u>կոնի հիմք</u>: E կետը կոչվում է կոնի գագաթ. իսկ OE ուղիղը, որն անցնում է կոնի գագաթով և հիմքի կենտրոնով, կոչվում է <u>կոնի առանցք</u>: Կոնի առանցքն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: OE հատվածը կոչվում է <u>կոնի բարձրություն</u>: Կոն կարելի է ստանալ՝ պտտելով ուղղանկյուն եռանկյունը իր էջերից մեկի շուրջը:

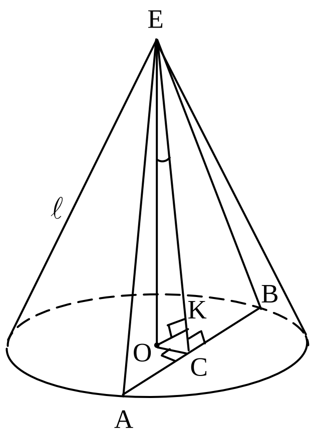
Դիտարկենք կոնի հատույթները տարբեր հարթություններով՝

1. Եթե <u>հատող հարթությունն անցնում է կոնի առանցքով</u>, ապա հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի հիմքը կոնի հիմքի տրամագիծն է, իսկ սրունքները կոնի ծնորդներն են: Այդ հատույթը կոչվում է <u>կոնի առանցքային հատույթ</u> (օրինակ ΔCEB-ն):



2. Եթե հատող հարթությունն ուղղահայաց է կոնի OE առանցքին, ապա կոնի հատույթը շրջան է, որի O_1 կենտրոնն ընկած է կոնի առանցքի վրա:

*) 3. Կոնի E գագաթով և հիմքի AB լարով անցնող հատույթը AEB հավասարասրուն եռանկյունն է, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է ECO անկյունը, որտեղ $EC \perp AB$, O-ն հիմքի կենտրոնն է, իսկ $OC \perp AB$ ըստ 3 ուղղահայացների թեորեմի:

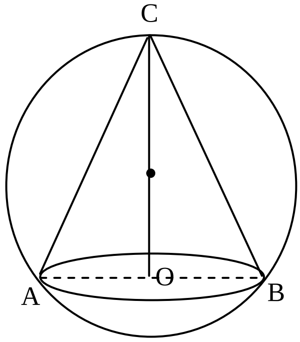


Եթե տանենք $OK \perp EC$, ապա OK-ն կլինի կոնի հիմքի կենտրոնի հեռավորությունը հատող հարթությունից, որովհետև $AC \perp EC$ և $AC \perp OC$ պայմաններից հետևում է, որ AC-ն ուղղահայաց է EOC հարթությանը, ուստի և այդ հարթության մեջ գտնվող ցանկացած ուղղի: Այսինքն $OK \perp AC$ և քանի որ $OK \perp EC$, ապա OK-ն ուղղահայաց է AEB հարթությանը: Այստեղից հետևում է նաև, որ կոնի OE առանցքի և հատող հարթության կազմած անկյունը $\angle$OEC-ն է:

<u>Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը</u>` $S_կ=\pi R\cdot \ell$, որտեղ $\ell$-ը ծնորդի երկարությունն է, իսկ R-ը` հիմքի շառավիղը:
<u>Կոնի լրիվ մակերևույթը</u>` $S_L=\pi R \ell+\pi R^2$
<u>Կոնի ծավալը</u>` $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, որտեղ H-ը կոնի բարձրության երկարությունն է:

<u>Կոնին ներգծած է բուրգ</u> նշանակում է, որ բուրգի հիմքի բազմանկյունը ներգծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ բուրգի գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ:
<u>Բուրգին ներգծված է կոն</u> նշանակում է, որ բուրգի հիմքի բազմանկյունը արտագծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ:
<u>Կոնը ներգծված է գնդային մակերևույթին</u> նշանակում է, որի կոնի գագաթն ընկած է գնդային մակերևույթի վրա, իսկ կոնի հիմքը գնդային մակե-րևույթի հատույթն է:

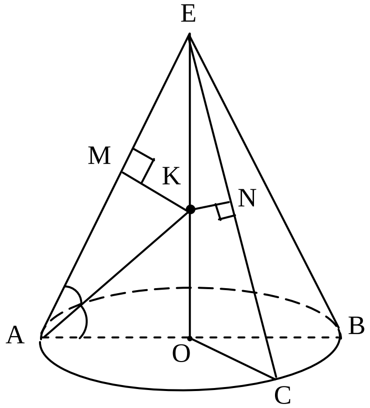
*) Այս սահմանումից հետևում է, որ կոնին արտագծած գնդի կենտրոնը գտնվում է կոնի առանցքի վրա (այդ կետը կարող է գտնվել նաև կոնից դուրս), որովհետև ըստ գնդի հատույթների հատկության կոնի հիմքի շրջանի կենտրոնից այդ շրջանի հարթությանը տարված ուղղահայացը անցնում է գնդի կենտրոնով:



Այստեղից էլ բխում է, <u>որ գնդի կենտրոնը կհամընկնի կոնի առանցքային հատույթի՝ ΔABC-ին արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հետ</u>, որովհետև ΔABC-ի հարթությունը գունդը հատում է գնդի մեծ շրջանով:

<u>Կոնին ներծված է գնդային մակերևույթ</u> նշանակում է, որ գնդային մակերևույթը շոշափում է կոնի հիմքը և նրա յուրաքանչյուր ծնորդը:

*) Ապացուցենք, որ <u>կոնին ներգծած գնդի կենտրոնը համընկնում է կոնի որևէ առանցքային հատույթին ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հետ</u>:



Իրոք, դիցուք K-ն EAB անկյան կիսորդի և կոնի EO բարձրության հատման կետն է (այսինքն AEB առանցքային հատույթին ներգծած շրջանագծի կենտրոնը): Տանենք կոնի որևէ EC ծնորդ և ցույց տանք, որ K կետը հավասարահեռ է AE և EC ծնորդներից:

Տանենք $KM \perp AE$ և $KN \perp CE$: Քանի որ $\Delta AEO = \Delta EOC$, որպես ընդհանուր EO էջ և հավասար ներքնաձիգներ՝ AE=EC ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ, ապա $\angle AEO = \angle OEC$: Ուստի $\Delta MKE = \Delta KEN$, որպես հավասար անկյուններ և ընդհանուր EK ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ $\Rightarrow MK = KN$:

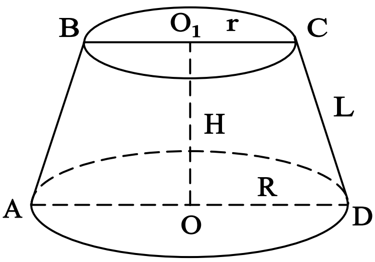
ՀԱՏԱԾ ԿՈՆ

<u>Սահմանում</u>

Վերցնենք կամայական կոն և տանենք հատող հարթություն՝ նրա առանցքին ուղղահայաց: Այդ հարթությունը կոնի հետ հատվում է շրջանով և կոնը տրոհում է երկու մասի: Այդ մասերից մեկն իր հերթին կոն է, իսկ մյուսը կոչվում է <u>հատած կոն</u>:

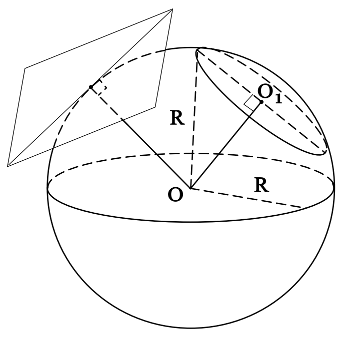
Սկզբնական կոնի հիմքը և այն շրջանը, որ ստացվել է կոնը հարթությամբ հատելիս, կոչվում են <u>հատած կոնի հիմքեր</u>: Հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածը կոչվում է հատած կոնի <u>բարձրություն</u>:

Կոնային մակերևույթի այն մասը, որը սահմանափակում է հատած կոնը կոչվում է նրա կողմնային մակերևույթ:
Կոնային մակերևույթի ծնորդների այն հատվածները, որոնք առնված են հիմքերի միջև, կոչվում են հատած կոնի ծնորդներ: Հատած կոնի բոլոր ծնորդները միմյանց հավասար են:
$S_Կ = \pi \cdot (R + r) \cdot L$, որտեղ L-ը հատած կոնի ծնորդն է,



$S_L = S_Կ + \pi R^2 + \pi r^2$; $V = \frac{1}{3} \pi \cdot H \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$, որտեղ H-ը հատած կոնի բարձրությունն է, իսկ R-ը և r-ը հիմքերի շառավիղները: O_1 և O կենտրոններով շրջանները կոչվում են հատած կոնի հիմքեր: ABCD հավասարասրուն սեղանը կոչվում է հատած կոնի առանցքային հատույթ, OO_1-ը՝ բարձրություն:
**) Հատած կոնին ներգծել (կամ արտագծել) գունդ դա նույնն է թե ABCD սեղանին ներգծել (կամ արտագծել) շրջանագիծ:

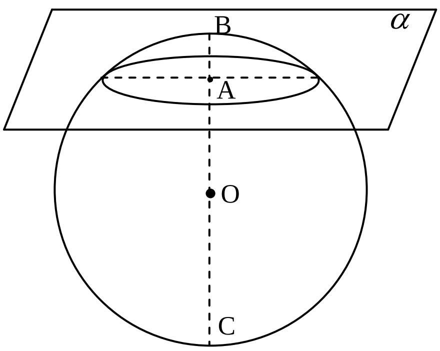
ԳՈՒՆԴ



Մակերևույթը, որը կազմված է տարածության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա, կոչվում է գնդային մակերևույթ: Տրված կետը կոչվում է գնդային մակերևույթի կենտրոն, իսկ տրված հեռավորությունը՝ գնդային մակերևույթի (սֆերայի) շառավիղ: Գնդային մակերևույթով պարփակված մարմինը կոչվում է գունդ: Գնդային մակերևույթի երկու կետերը միացնող և նրա կենտրոնով անցնող հատվածը կոչվում է գնդի տրամագիծ:
Գնդի հատույթը ցանկացած հարթությամբ շրջան է, որի կենտրոնում այդ շրջանի հարթությանը կանգնեցրած ուղղահայացը անցնում է գնդի կենտրոնով: Այն հատույթը, որը անցնում է գնդի կենտրոնով կոչվում է գնդի մեծ շրջան:
Գնդին շոշափող հարթություն կոչվում է այն հարթությունը, որը գնդի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ:
Շոշափման կետով անցնող գնդի շառավիղը ուղղահայաց է շոշափող հարթությանը:
Ճիշտ է նաև հակադարձ թեորեմը.
Եթե գնդային մակերևույթի շառավիղն ուղղահայաց է իր՝ այդ մակերևույթի վրա ընկած ծայրակետով անցնող հարթությանը, ապա այդ հարթությունը գնդային մակերևույթի շոշափող է:

Գնդի ծավալը՝ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$:

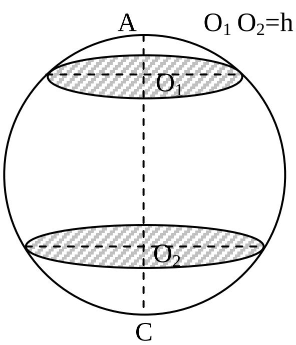
Գնդի մակերևույթի (սֆերայի) մակերեսը՝ $S=4\pi R^2$:



Գնդային սեգմենտ կոչվում է գնդի այն մասը, որը նրանից անջատվում է հատող հարթությամբ: Այս նկարում A կետով անցնող α հարթությունը տրոհում է գունդը երկու գնդային սեգմենտների: Հատույթում ստացված շրջանը կոչվում է այդ սեգմենտներից յուրաքանչյուրի հիմք, իսկ հատող հարթությանն ուղղահայաց BC տրամագծի AB և AC հատվածները կոչվում են այդ սեգմենտների բարձրություններ:

AB=h (կամ AC=h)

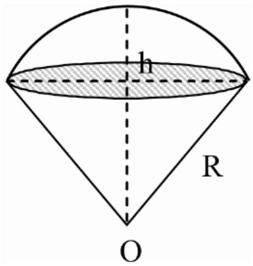
Եթե գնդի շառավիղը R է, իսկ գնդային սեգմենտի բարձրությունը՝ h, ապա գնդային սեգմենտի ծավալը՝ $V=\pi\cdot h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$, իսկ սեգմենտային մակերևույթի մակերեսը՝ $S=2\pi Rh$ (սեգմենտային մակերևույթը գնդային մակերևույթը հարթությամբ հատելիս առաջացած մասերն են):



Գնդային շերտ կոչվում է գնդի այն մասը, որն առնված է գունդը հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև: Հարթությունների հատումից ստացված շրջանները կոչվում են գնդային շերտի հիմքեր, իսկ այդ հարթությունների միջև հեռավորությունը՝ գնդային շերտի բարձրություն: Գնդային շերտի ծավալը կարելի է հաշվել, որպես երկու գնդային սեգմենտների ծավալների տարբերություն, օրինակ այս նկարում պատկերված գնդային շերտի ծավալը հավասար է այն երկու գնդային սեգմենտների ծավալների տարբերությանը, որոնց բարձրություններն են AO_2 և AO_1 հատվածները:

Գնդային մակերևույթի այն մասը, որն առնված է հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև, կոչվում է գնդային գոտի, որի մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝ $S=2\pi Rh$:

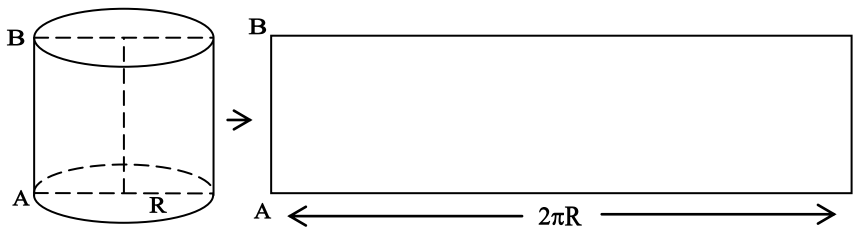
Գնդային սեկտոր կոչվում է այն մարմինը, որն առաջանում է 90^0-ից փոքր աղեղով շրջանային սեկտորի պտտումից մի ուղղի շուրջը, որն ընդգրկում է այդ շրջանային սեկտորը սահմանափակող շառավիղներից մեկը:

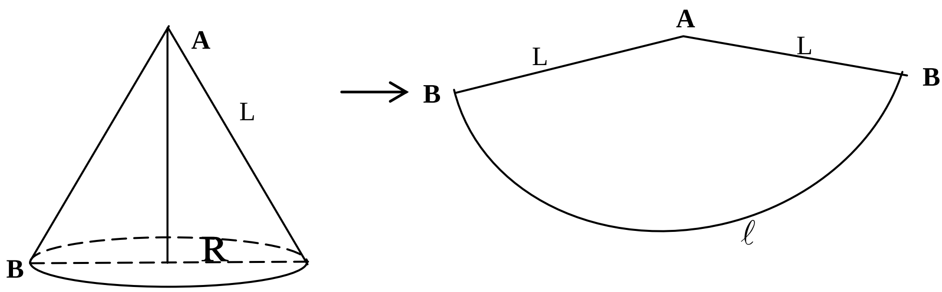


Գնդային սեկտորը կազմված է միևնույն հիմքն ունեցող գնդային սեգմենտից և կոնից:
Եթե գնդի շառավիղը R է, իսկ գնդային սեգմենտի բարձրությունը` h, ապա գնդային սեկտորի V ծավալը հաշվում են $V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$ բանաձևով, իսկ նրա մակերևույթի մակերեսը հավասար է կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի և սեգմենտի մակերևույթի մակերեսի գումարին:

ՓՌՎԱԾՔ

Գլանի փռվածքը ուղղանկյուն է, որի կողմերից մեկը հավասար է գլանի ծնորդին, իսկ մյուսը` գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությանը:



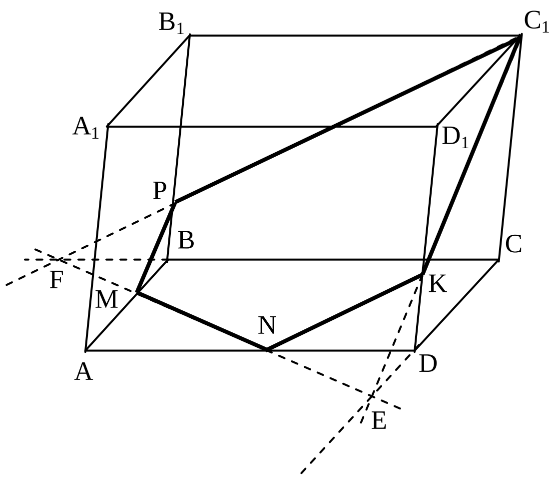


Կոնի փռվածքը շրջանային սեկտոր է, որի շառավիղը հավասար է կոնի ծնորդին, իսկ սեկտորի աղեղի երկարությունը հավասար է կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը` $\ell=2\pi R$:

ՀԱՏՈՒՅԹՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Պրիզմայի կամ բուրգի հատող հարթություն կանվանենք ամեն մի հարթություն, որի երկու կողմերում էլ առկա են տվյալ պրիզմայի կամ բուրգի կետեր: Հատող հարթությունը պրիզմայի կամ բուրգի նիստերը հատում է հատվածներով (որևէ նիստի հետ կարող է ունենալ, մասնավորապես, ընդ-

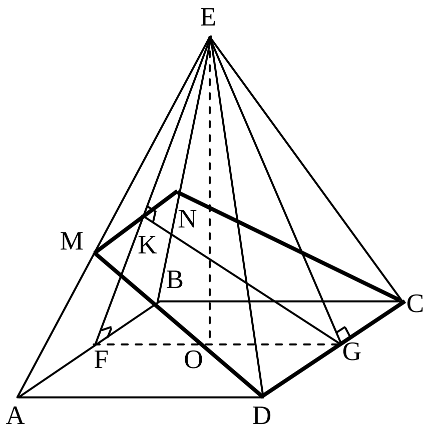
հանուր կետ)։ Այն բազմանկյունը, որի կողմերը այդ հատվածներն են կոչ-վում է պրիզմայի կամ բուրգի հատույթ։
Պրիզմայի հատույթներ կառուցելիս պետք է նկատի ունենալ այն փաստը, որ եթե հատող հարթությունը հատում է երկու զուգահեռ նիստեր ինչ-որ հատվածներով, ապա այդ հատվածները զուգահեռ են։
Պրիզմայի կամ բուրգի հատույթը կառուցելու համար կարևոր է կառուցել այն կետերը, որոնցով հատող հարթությունը հատում է պրիզմայի կամ բուրգի կողերը։ Դրանից հետո մնում է տանել բոլոր այն հատվածները, որոնք միացնում են միևնույն նիստի վրա արդեն կառուցված երկու կետերը։ Քննարկենք երկու օրինակ.
Օրինակ 1^0. Զուգահեռանիստի կողերի վրա նշված են M, N և C_1 կետերը։ Կառուցել զուգահեռանիստի հատույթը MNC_1 հարթությամբ։



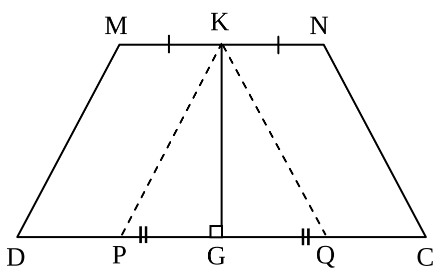
Լուծում. ABCD նիստը MNC_1 հարթությունը հատում է MN ուղղով, որը, իր հերթին, DD_1C_1C նիստը կհատի E, իսկ BB_1C_1C նիստը՝ F կետում։ Միացնելով C_1 կետը E-ի հետ DD_1 կողի վրա կստանանք K կետը, որը պատկանում է MNC_1 հատող հարթությանը։ Նույն ձևով, միացնելով F և C_1 կետերը, BB_1 կողի վրա կստանանք P կետը, որը պատկանում է MNC_1 հատող հարթությանը։ Միացնելով զուգահեռանիստի կողերի վրա ստացված N, K, C_1, P, M և N կետերը կստանանք պահանջվող հատույթը, որը տվյալ դեպքում $MNKC_1P$ հնգանկյունն է։ (9-րդ դասարանի երկրաչափության դասագրքից կարդալ էջ 31-34-ում 1,2,3 խնդիրների լուծումները)։

Օրինակ 2^0. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմով նրա հանդիպակաց նիստին տանել ուղղահայաց հատույթ։

Լուծում. DC կողով պետք է տանել AEB նիստին ուղղահայաց հատույթ։ Տանենք ABE և DEC նիստերի EF և EG հարթագծերը և դիտարկենք EFG հավասարասրուն եռանկյունը։ Տանենք այդ եռանկյան GK բարձրությունը՝ $GK \perp EF$ և K կետով տանենք AB-ին զուգահեռ MN հատվածը։ DMNC սեղանը որոնելի հատույթն է, որովհետև MN||AB և AB||DC $\Rightarrow$ MN||DC։ Մյուս կողմից, քանի որ $AB \perp FG$ և $AB \perp EF \Rightarrow AB \perp EFG$ հարթությանը $\Rightarrow AB \perp KG$։ Այսպիսով, $KG \perp AB$ և $KG \perp EF \Rightarrow KG \perp AEB$ հարթությանը և հետևաբար $KG \perp MN$ և քանի որ $EK \perp MN$, ապա AEB և DMNC հարթությունների կազմած անկյունը՝ $\angle EKG$-ն է, որը 90^0 է:



Կարելի է ցույց տալ նաև, որ հատույթում ստացվել է հավասարասրուն սեղան: Առանձին նկարենք այդ հատույթը՝

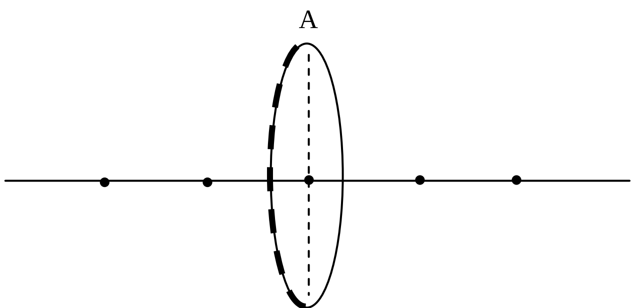


Ունենք, որ այդ սեղանի KG բարձրությունը անցնում է նրա հիմքերի միջնակետերով: K կետով տանենք MD և NC սրունքներին զուգահեռ ուղիղներ՝ KP||MD և KQ||NC, ապա DP=MK=KN=QC, որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր: Այստեղից՝ PG=DG-DP= CG-CQ=GQ: Ուստի ուղղ. $\Delta PKG =$ ուղղ. $\Delta KGQ \Rightarrow$ KP=KQ: Բայց KP=MD և KQ=NC, որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր՝ $\Rightarrow MD = NC$:

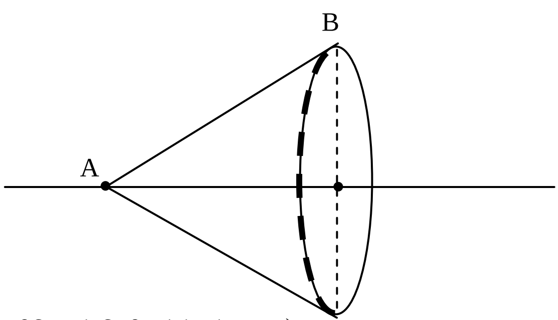
ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Որոշ խնդիրներում պահանջվում է գտնել այն մարմնի ծավալը կամ մակերևույթի մակերեսը, որը առաջացել է հարթ պատկերի (սովորաբար բազմանկյան) պտտումից տրված առանցքի շուրջը:

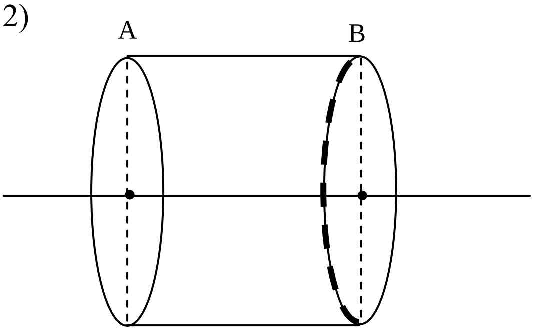
Այստեղ պետք է նկատի ունենալ հետևյալ փաստերը՝
ա) կետը առանցքի շուրջը պտտելիս ստացվում է շրջանագիծ՝



բ) հատվածը առանցքի շուրջը պտտելիս կարող են ստացվել հետևյալ մակերևույթները՝
1)

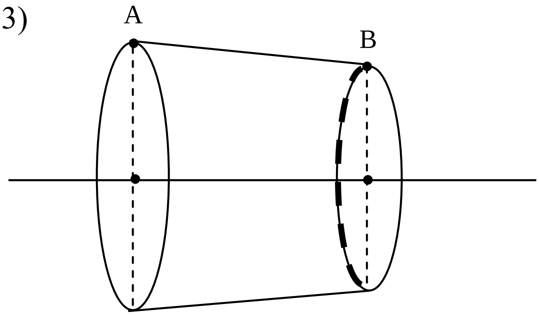


(կոնի կողմնային մակերևույթ)
2)



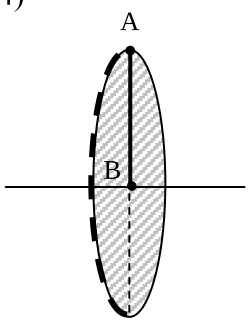
(գլանի կողմնային մակերևույթ)
(AB-ն զուգահեռ է պտտման առանցքին)

3)



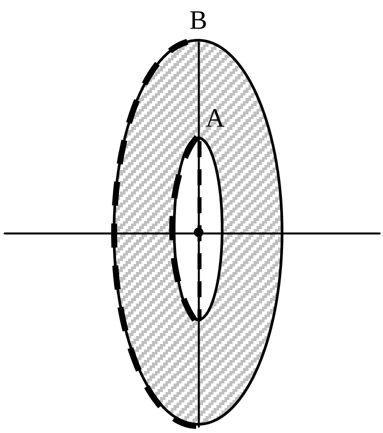
(հատած կոնի կողմնային մակերևույթ)

4)



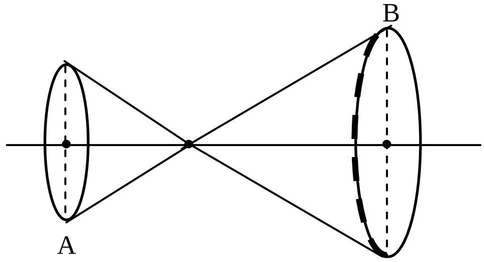
(շրջան)
(AB-ն ուղղահայաց է պտտման առանցքին և հատում է այդ առանցքը)

5)



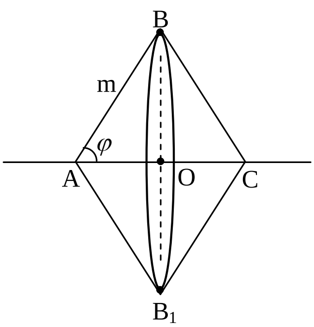
(շրջանային օղակ)
(AB-ն ուղղահայաց է պտտման առանցքին և չի հատում այդ առանցքը)

6)



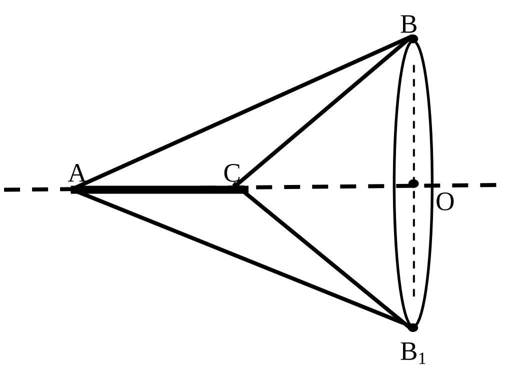
(երկու կոների կողմնային մակերևույթներ, AB-ն հատում է պտտման առանցքը)
Պարզ է, որ պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսը հավասար է այն մակերևույթների մակերեսների գումարին, որոնք առաջացել են բազմանկյան բոլոր կողմերի պտտումից, իսկ պտտման մարմնի ծավալը կարող է հանդիսանալ որոշ մարմինների ծավալների գումար կամ տարբերություն: Ասվածը պարզաբանենք երկու օրինակներով՝

1. Հավասարասրուն եռանկյունը, որի սրունքը m է, իսկ հիմքին առընթեր անկյունը՝ φ, պտտվում է հիմքի շուրջը: Գտնել եռանկյան պտտումից ստացվող մարմնի մակերևույթի մակերեսը և ծավալը:



Լուծում. Պտտումից կառաջանան միևնույն հիմքով երկու հավասար կոներ $\Rightarrow$ $S_{պտ}=2S_{կ}$, որտեղ $S_{կ}$–ը BO հիմքի շառավղով և AB ծնորդով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է, իսկ $V_{պտ}=2V_{կ}$, որտեղ $V_{կ}$ –ը նույն կոնի ծավալն է: Խնդրի լուծման մնացած մասը դժվարություն չի ներկայացնում:

2. Բութանկյուն եռանկյան փոքր բարձրությունը 4 է, իսկ սուր անկյունները՝ 30^0 և 45^0: Որոշել 30^0 անկյան դիմացի կողմի շուրջը եռանկյան պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը և ծավալը:



Լուծում. AC կողմի շուրջը պտտումից կառաջանան միևնույն հիմքով երկու կոներ $\Rightarrow$ $S_{պտ}=S_1+S_2$, որտեղ S_1-ը BO հիմքի շառավղով և AB ծնորդով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է, իսկ S_2-ը՝ BO հիմքի շառավղով և BC ծնորդով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
Իսկ $V_{պտ}=V_1-V_2$, որտեղ V_1-ը և V_2-ը նույն կոների ծավալներն են: Մնացածը պարզ է: