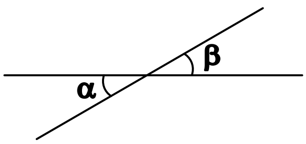
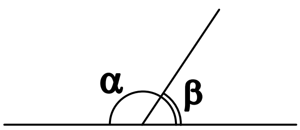
ԲԱԺԻՆ III

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

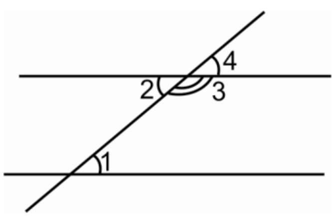
Ուղղի վրա նշված որևէ կետով ուղիղը տրոհվում է երկու մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է այդ կետից ելնող ճառագայթ:
Անկյունը երկրաչափական պատկեր է, որը կազմված է կետից և նրանից ելնող երկու ճառագայթներից: Այդ ճառագայթները կոչվում են անկյան կողմեր, իսկ նրանց ընդհանուր սկզբնակետը՝ անկյան գագաթ:



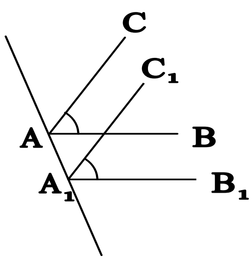
α-ն և β-ն կոչվում են հակադիր անկյուններ: Հակադիր անկյունները իրար հավասար են:



α-ն և β-ն կոչվում են կից անկյուններ: Կից անկյունների գումարը 180° է՝ α+β=180°:
Հարթության վրա գտնվող երկու ուղիղներ կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք չեն հատվում:



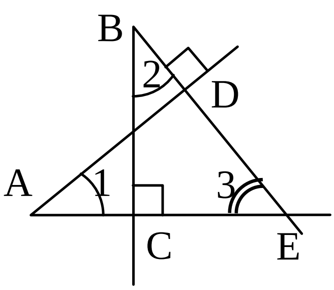
Երկու զուգահեռ ուղիղներ* երրորդով հատվելիս առաջացած ներքին խաչադիր, ինչպես նաև համապատասխան անկյունները իրար հավասար են, իսկ միակողմանի անկյունների գումարը 180^{o} է ($\angle 1$ և $\angle 2$-ը կոչվում են ներքին խաչադիր, ($\angle 1$ և $\angle 4$-ը համապատասխան, իսկ $\angle 1$ և $\angle 3$-ը՝ միակողմանի):
Ճիշտ է և հակառակը, եթե երկու ուղիղներ երրորդով հատելիս առաջացած ներքին խաչադիր կամ համապատասխան անկյունները հավասար են կամ միակողմանի անկյունների գումարը 180^{o} է, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են: (Այս հատկությունը կոչվում է ուղիղների զուգահեռության հայտանիշ):



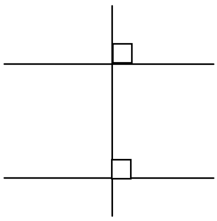
Զուգահեռ ուղիղների հեռավորություն կոչվում է այդ ուղիղներից մեկի կամայական կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից:

Համուղղված կողմերով անկյունները իրար հավասար են, այսինքն եթե $AC \parallel A_1C_1$, $AB \parallel A_1B_1$, և զուգահեռ կողմերն ընկած են AA_1 ուղղի միևնույն կողմում, ապա $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$

* Ասելով «երկու կետ», «երեք կետ», «երկու ուղիղ» և այլն միշտ կհամարենք, որ այդ կետերը, այդ ուղիղները տարբեր են:

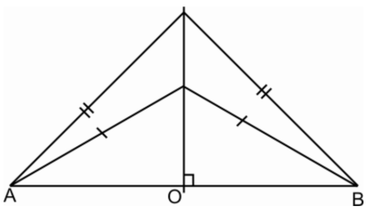


[*]) Փոխուղղահայաց կողմերով անկյունները իրար հավասար են (եթե երկուսն էլ սուր են կամ երկուսն էլ բութ), որովհետև $\angle 1 = 90° - \angle 3$, ΔADE-ից և $\angle 2 = 90° - \angle 3$ ΔBCE-ից:

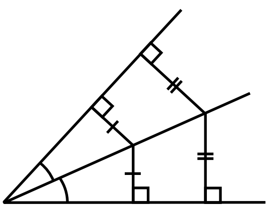


Ուղղի վրա չգտնվող կետից այդ ուղղին կարելի է տանել ուղղահայաց, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Եթե ուղիղն ուղղահայաց է երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկին, ապա ուղղահայաց է նաև մյուսին:

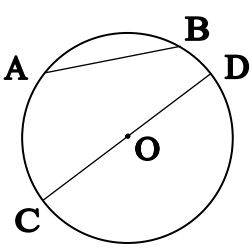


Հատվածի միջնուղղահայացի վրա գտնվող ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված հատվածի ծայրակետերից: (Միջնուղղահայաց կոչվում է AB-ի միջնակետում AB-ին տարված ուղղահայացը): Ճիշտ է նաև հակառակը, եթե որևէ կետ հավասարահեռ է հատվածի ծայրակետերից, ապա գտնվում է այդ հատվածի միջնուղղահայացի վրա:



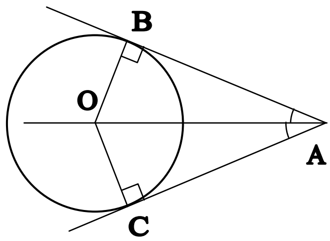
Անկյան կիսորդը դա անկյան գագաթից ելնող այն ճառագայթն է, որն անկյունը բաժանում է երկու հավասար մասի: Կիսորդի վրա գտնվող ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված անկյան կողմերից: (Կետի հեռավորությունը ուղղից դա այդ կետից ուղղին տարած ուղղահայացի երկարությունն է): Ճիշտ է և հակառակ պնդումը, եթե որևէ կետ հավասարահեռ է անկյան կողմերից, ապա այն գտնվում է անկյան կիսորդի վրա:

ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ



Սահմանում 1 Շրջանագծի կենտրոնը այդ շրջանագծի որևէ կետի հետ միացնող հատվածը կոչվում է շառավիղ: Շրջանագծի որևէ երկու կետ միացնող հատվածը կոչվում է լար (օրինակ AB-ն): Շրջանի կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է տրամագիծ (օրինակ CD-ն):

Ծանոթություն. *)–ով նշված են այն բանաձևերն ու փաստերը, որոնք խնդիրներում կիրառելիս նախապես պետք է ապացուցել (դրա համար էլ ապացույցները նշված են)



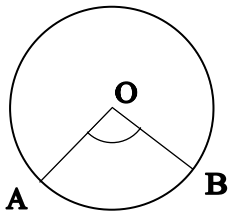
Սահմանում 2 Այն ուղիղը, որը շրջանագծի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ կոչվում է շրջանագծի շոշափող: Շոշափողը ունի հետևյալ հատկությունները`

1) Շրջանագծի շոշափողը ուղղահայաց է շոշափման կետով անցնող շառավղին և հակառակը` եթե ուղիղն անցնում է շառավղի` շրջանագծի վրա գտնվող ծայրակետով և ուղղահայաց է այդ շառավղին, ապա այն շոշափող է:

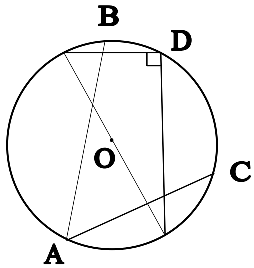
2) Եթե որևէ A կետից շրջանագծին տարված են երկու շոշափողներ, ապա

ա) AB=AC (որտեղ B-ն և C-ն շոշափման կետերն են)

բ) $\angle$A-ի կիսորդը անցնում է շրջանի կենտրոնով:

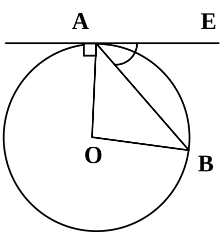


Սահմանում 3 Անկյունը, որի գագաթը շրջանագծի կենտրոնն է, կոչվում է *կենտրոնական անկյուն*: Կենտրոնական անկյունը չափվում է իր հենման աղեղի աստիճանային չափով` $\angle AOB=\cup AB$



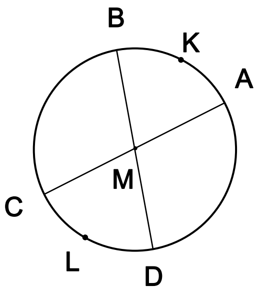
Սահմանում 4 Այն անկյունը, որի գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա, իսկ կողմերը հատում են այդ շրջանագիծը, կոչվում է ներգծյալ անկյուն: Ներգծյալ անկյունը չափվում է իր հենման աղեղի աստիճանային չափի կեսով`

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\cup BDC$$



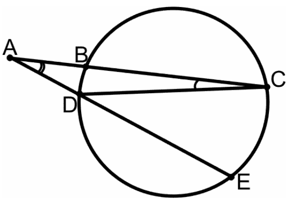
Հետևանք 1 Տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյունը հավասար է 90°, օրինակ` $\angle D=90°$:

Հետևանք 2* Շոշափողով և լարով կազմված անկյունը հավասար է նրանց մեջ պարփակված աղեղի կեսին` $\angle EAB=\frac{1}{2}\cup AB$: Իրոք O կենտրոնը միացնելով A և B կետերին կստանանք OAB հավասարասրուն եռանկյունը, ուստի $\angle OAB=\frac{180°-\angle AOB}{2}$: Քանի որ A-ն շոշափման կետն է, ապա $\angle OAE=90°$: Ուստի $\angle EAB=90°-\angle OAB=90°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle AOB\right)=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cup AB,$ որովհետև AOB կենտրոնական անկյունը չափվում է իր հենման $\cup AB$-ի աստիճանային չափով:

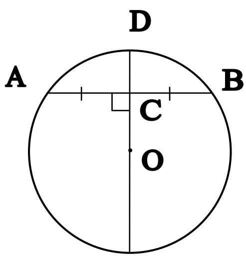


<u>Հետևանք 3</u> Շրջանագծի երկու հատվող լարերով կազմված անկյունը՝ $\angle AMB=\frac{1}{2}(\cup CLD + \cup AKB)$:

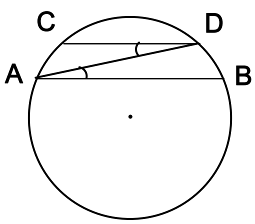
*) Շրջանից դուրս վերցրած կետով այդ շրջանագծին տարված երկու հատողներով կազմված անկյունը չափվում է այն աղիղների աստիճանային չափերի տարբերության կեսով, որոնք առնված են հատողների միջև:



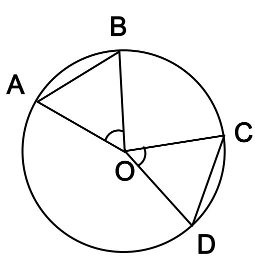
Իրոք, միացնելով D և C կետերը կստանանք, որ $\angle CDE$-ն ΔADB-ի արտաքին անկյունն է:
$\Rightarrow \angle CDE = \angle A + \angle C$ և քանի որ
$\angle CDE = \frac{1}{2} \cup CE$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BD$,
ապա $\angle A = \frac{1}{2}\left(\cup CE - \cup BD\right)$:



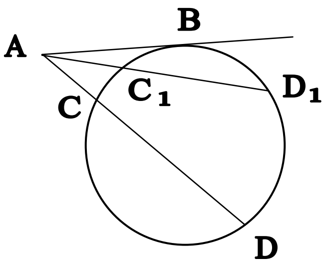
<u>Լարին ուղղահայաց տրամագիծը</u> կիսում է այդ լարը և այդ լարով ձգված աղեղը, այսինքն եթե $OD \perp AB$, ապա $AC=CB$, $\cup AD= \cup DB$:
Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը.
Լարի միջնակետով անցնող տրամագիծը ուղղահայաց է այդ լարին:



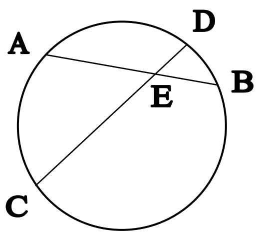
*) <u>Շրջանագծի զուգահեռ լարերի միջև առնված աղեղների աստիճանային չափերը իրար հավասար են</u>:
Իրոք, միացնենք A-ն և D-ն: $\angle CDA=\angle DAB$, որպես ներքին խաչադիր անկյուններ:
Ըստ ներգծյալ անկյան հատկության՝
$\angle CDA=\frac{1}{2} \cup AC, \ \ \angle DAB = \frac{1}{2} \cup DB$
$\Rightarrow \cup AC = \cup DB$:



*) <u>Շրջանագծի հավասար աղեղները ձգում են հավասար լարեր և հակառակը՝ հավասար լարերը ձգում են հավասար աղեղներ:</u>
Իրոք, դիցուք $\cup AB = \cup CD$: Ուստի $\angle COD= \angle BOA$, որպես հավասար աղեղների վրա հենված կենտրոնական անկյուններ: Այստեղից $\Delta AOB=\Delta COD$, որովհետև AO=OD=OB=OC=R: Ուստի AB=CD: Նույն ձևով ապացուցվում է հակառակ պնդումը:



Եթե որևէ A կետից շրջանագծին տարված են <u>AB շոշափող և AD հատող</u>, ապա $AB^2=AC\cdot AD$:
<u>Հետևանք</u> Եթե շրջանից դուրս վերցված որևէ A կետով շրջանագծին տարված են AD և AD_1 հատողները, ապա $AC\cdot AD=AC_1\cdot AD_1$:



Եթե շրջանի մեջ վերցված որևէ E կետով տարված են կամայական երկու լար՝ AB և CD, ապա $AE\cdot EB=CE\cdot ED$:

<u>Շրջանագծի երկարությունը</u>՝ $C=2\pi\cdot R$,
<u>Շրջանի մակերեսը</u>՝ $S=\pi\cdot R^2$, որտեղ $\pi\approx3{,}14$, իսկ R-ը շրջանի շառավիղն է:

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ
Եռանկյունների հավասարության հայտանիշները

<u>Սահմանում</u>. Երկու եռանկյուններ կոչվում են հավասար, եթե վերադրումով դրանք կարող են համընկնել:

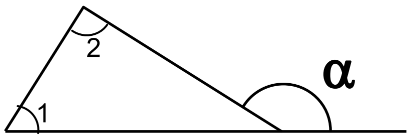
1) Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը և նրանցով կազմված անկյունը հավասար են մյուս եռանկյան երկու կողմերին և նրանցով կազմված անկյանը, ապա այդ եռանկյունները իրար հավասար են:
2) Եթե մի եռանկյան կողմը և նրան առընթեր երկու անկյունները հավասար են մյուս եռանկյան նույնանման տարրերին, ապա այդ եռանկյունները իրար հավասար են:
3) Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը հավասար են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

**) Հավասար եռանկյունների հավասար կողմերին տարված բարձրությունները հավասար են:

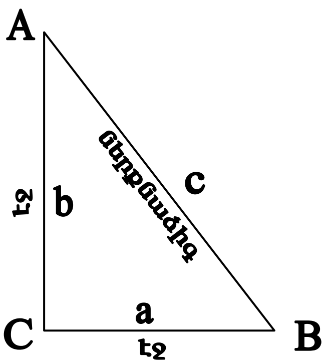
<u>Եռանկյան մեջ</u> հավասար անկյունների դիմաց ընկած են հավասար կողմեր և հակառակը՝ հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ:

<u>Եռանկյան մեջ</u> մեծ կողմի դիմաց ընկած է մեծ անկյուն և հակառակը՝ մեծ անկյան դիմաց մեծ կողմ: <u>Եռանկյան ցանկացած երկու կողմերի գումարը</u> մեծ է երրորդ կողմից: (Այս հատկությունը կոչվում է <u>եռանկյան անհավասարություն</u>):

<u>Եռանկյան ներքին անկյունների գումարը 180° է:</u>



Եռանկյան որևէ ներքին անկյան կից անկյունը կոչվում է եռանկյան <u>արտաքին անկյուն</u>:
(Օրինակ՝ α -ն արտաքին անկյուն է)
$\alpha = \angle 1 + \angle 2$



ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ

<u>Սահմանում</u> Այն եռանկյունը, որի անկյուններից մեկը 90° է, կոչվում է ուղղանկյուն եռանկյուն: a-ն և b-ն կոչվում են <u>էջ</u>, իսկ c-ն <u>ներքնաձիգ:</u>

Առնչություններ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև

1) Պյութագորասի թեորեմը՝ $AB^2=AC^2+CB^2$ (ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին)

Ճիշտ է և հակադարձ թեորեմը.

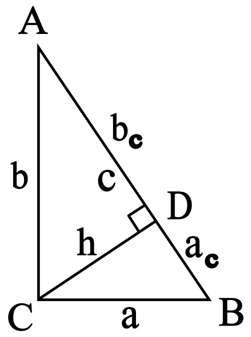
Եթե եռանկյան մի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին, ապա այդ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

2) $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$ (այսինքն սուր անկյան սինուսը =է դիմացի էջի հարաբերությանը ներքնաձիգին)

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$ (այսինքն սուր անկյան կոսինուսը =է կից էջի հարաբերությանը ներքնաձիգին)

$tgA = \dfrac{CB}{AC}$ (այսինքն սուր անկյան տանգենսը =է դիմացի էջի հարաբերությանը կից էջին)

3) $\angle A+\angle B=90°$

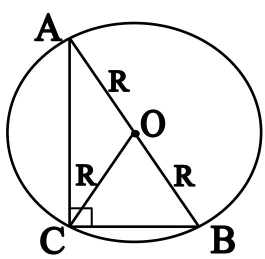


Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարած բարձրության հատկությունները

$CD^2 = AD \cdot DB$ (կամ $h^2 = a_c \cdot b_c$)
$CA^2 = AD \cdot AB$ (կամ $b^2 = c \cdot b_c$)
$CB^2 = BD \cdot AB$ (կամ $a^2 = c \cdot a_c$)
$CD \cdot AB = CB \cdot AC$ (կամ $h \cdot c = a \cdot b$)

AD-ն կոչվում է AC էջի պրոյեկցիա ներքնաձիգի վրա, իսկ BD-ն CB էջի պրոյեկցիա ներքնաձիգի վրա: $c = a_c + b_c$ ($AD = b_c$, $DB = a_c$)

Եռանկյան երեք գագաթներով անցնող շրջանագիծը կոչվում է այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագիծ:



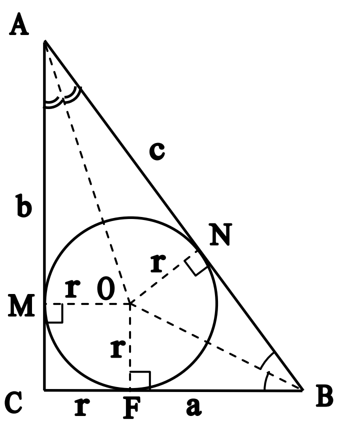
1)ուղղանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է ներքնաձիգի միջնակետում,

2)այդ շրջանի շառավիղը $R = \dfrac{AB}{2}$:

3)Ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին (OC-ն այդ միջնագիծն է)

4) ΔAOC -ն և ΔBOC -ն հավասարասրուն են (AO=OC, OB=OC)

Այն շրջանագիծը, որը շոշափում է եռանկյան երեք կողմերը կոչվում է այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագիծ:



1) Ներգծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում:

2) Ներգծած շրջանագծի շառավիղը

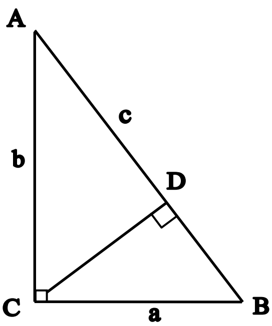
$r = \dfrac{a+b-c}{2}$

3) AM=AN, BF=BN, CM=CF=r (որպես մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողներ), որտեղ M-ը, F-ը և N-ը ներգծած շրջանագծի և եռանկյան կողմերի շոշափման կետերն են:

4) CMOF-ը քառակուսի է, $ON \perp AB$

5)* $\angle AOB = 135°$, որովհետև ΔAOB -ից՝

$$\angle AOB = 180° - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180° - \frac{90°}{2} = 135°$$

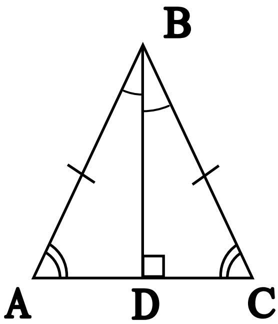


Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով.

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AC \ \text{(կամ } S=\frac{1}{2}a\cdot b\text{)}$$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD \ \text{(կամ } S=\frac{1}{2}c\cdot h\text{)}$$

$$S=\frac{1}{2}CB\cdot AB\cdot\sin B,\quad S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A$$



Հավասարասրուն եռանկյուն.

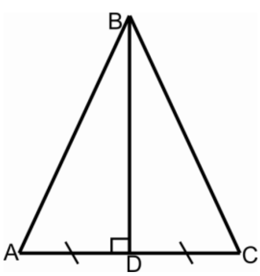
Սահմանում. Այն եռանկյունը, որի երկու կողմերը հավասար են, կոչվում է հավասարասրուն եռանկյուն:

AB և BC իրար հավասար կողմերը կոչվում են սրունքներ, AC-ն՝ հիմք: Հավասարասրուն եռանկյան մեջ՝

ա) հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են՝ $\angle A=\angle C$: Ճիշտ է նաև հակառակը, եթե որևէ եռանկյան երկու անկյունները հավասար են, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

բ) B գագաթից տարված բարձրությունը հանդիսանում է և միջնագիծ, և B անկյան կիսորդ: (Յանկացած եռանկյան մեջ միջնագիծ կոչվում է նրա որևէ գագաթը դիմացի կողմի միջնակետին միացնող հատվածը: Եռանկյան գագաթից հանդիպակաց կողմն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը կոչվում է եռանկյան բարձրություն: Եռանկյան կիսորդը նրա որևէ գագաթը հանդիպակաց կողմին միացնող այն հատվածն է, որը կիսում է այդ գագաթի անկյունը):

գ)* Եթե եռանկյան միջնագիծը համընկնում է նրա բարձրությանը , ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:



Իրոք, քանի որ ըստ պայմանի $AD=DC$ և $\angle BDA=\angle BDC=90^0$, ապա $\Delta ABD=\Delta BDC$ (BD կողմը ընդհանուր է) ըստ եռանկյունների հավասարության հայտանիշի $\Rightarrow AB=BC$:

դ)* Եթե եռանկյան կիսորդը համընկնում է բարձրությանը, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

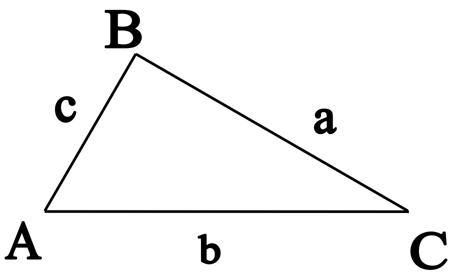
Իրոք, այս դեպքում $\Delta ABD=\Delta DBC$, ըստ եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշի՝ BD-ն

Ծանոթություն. **)-ով նշված են դասագրքի որոշ խնդիրներ. (դրանց մի մասը լուծված է տեքստում) ընդհանուր է, և նրան առընթեր անկյունները երկու եռանկյուններում համապատասխանաբար հավասար են:

ե)** Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի գագաթներից տարված բարձրությունները հավասար են:

զ)** Եթե եռանկյան կիսորդը միջնագիծ է, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

Առնչություններ ցանկացած եռանկյան մեջ.



ա) Սինուսների թեորեմը՝

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

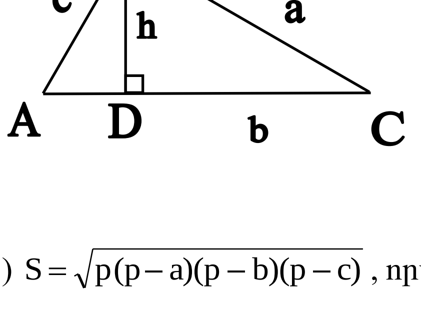
(Որտեղ R-ը արտագծած շրջանագծի շառավիղն է)

կամ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

Կոսինուսների թեորեմ $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A$

*) Հետևանք. Եթե BC-ն ABC եռանկյան ամենամեծ կողմն է, ապա $BC^2>AC^2+AB^2$ դեպքում եռանկյունը բութանկյուն է, $BC^2<AC^2+AB^2$ դեպքում եռանկյունը սուրանկյուն է, $BC^2=AC^2+AB^2$ դեպքում՝ ուղղանկյուն եռանկյուն է: Որովհետև օրինակ $BC^2 > AC^2 + AB^2$ դեպքում $\cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB}$-ից $\Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow A > 90°$: Նույն կերպ մնացած դեպքերում:

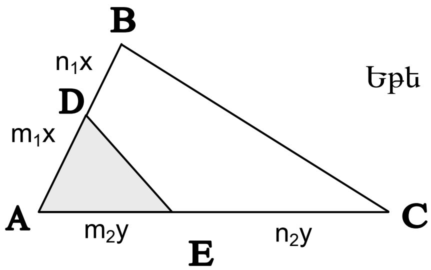
Եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝



ա) $S = \frac{1}{2} AC \cdot h$ (այսինքն S-ը = է եռանկյան որևէ կողմի և այդ կողմին տարած բարձրության արտադրյալի կեսին): Այս բանաձևից հետևում է, որ եթե երկու եռանկյունների բարձրությունները հավասար են, ապա նրանց մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը:

բ) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ $p = \frac{a+b+c}{2}$ (Հերոնի բանաձև) գ) $S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot \sin A$,(այսինքն S-ը հավասար է որևէ 2 կողմերի և նրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին):

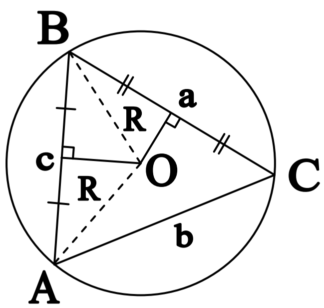
Այս բանաձևից հետևում է, որ <u>եթե երկու եռանկյուններից մեկի անկյունը հավասար է մյուսի անկյանը, ապա այդ եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են ինչպես հավասար անկյուն կազմող կողմերի արտադրյալները</u>:



Եթե $\frac{AD}{DB}=\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{AE}{EC}=\frac{m_2}{n_2}$, ապա

$$S_{ADE}=\frac{m_1}{m_1+n_1}\cdot\frac{m_2}{m_2+n_2}\cdot S_{ABC}$$

Եռանկյան արտագծած շրջանագիծ.

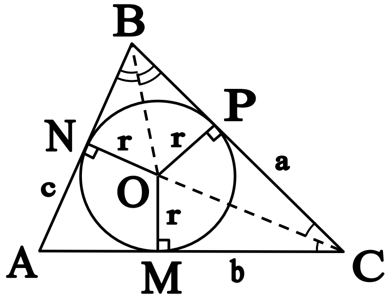


Եռանկյան երեք գագաթներով անցնող շրջանագիծը կոչվում է այդ եռանկյան արտագծած շրջանագիծ: Արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում (բութանկյուն եռանկյուններում կենտրոնը գտնըվում է եռանկյունից դուրս): Արտագծած շրջանագծի շառավիղը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

ա) $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$ (որտեղ S-ը եռանկյան մակերեսն է)

բ) $R=\frac{a}{2\sin A}$ (ըստ սինուսների թեորեմի)

*) Եթե O-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա $\angle AOB=2\cdot\angle C$, որովհետև $\angle AOB$-ն $\cup AB$-ի վրա հենված կենտրոնական անկյուն է, իսկ $\angle ACB$-ն նույն աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյուն է:



Եռանկյանը ներգծած շրջանագիծ

Եռանկյան երեք կողմերը շոշափող շրջանագիծը կոչվում է այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագիծ:

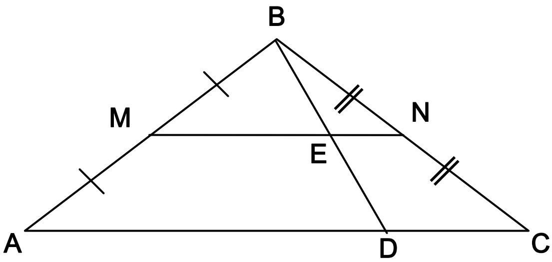
ա)Ներգծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում:

բ)Ներգծած շրջանագծի շառավիղը $r = \frac{S}{p}$, որտեղ S-ը եռանկյան մակերեսն է, իսկ $p = \frac{a+b+c}{2}$:

գ) Եթե M,N և P-ն եռանկյան կողմերի հետ ներգծած շրջանագծի շոշափման կետերն են, իսկ O-ն շրջանագծի կենտրոնը, ապա AM=AN, BN=BP, CM=CP և OM⊥AC, ON⊥AB, OP⊥BC, ըստ մի կետից շրջանագծին տարված երկու շոշափողների հատկության:

Եռանկյան միջին գիծը

Եռանկյան որևէ 2 կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է այդ եռանկյան միջին գիծ: Միջին գիծը ունի հետևյալ հատկությունները`

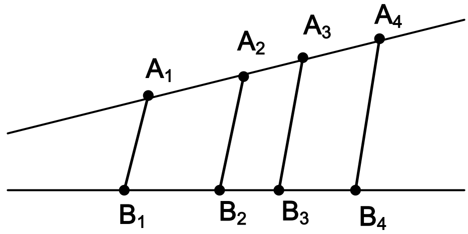


ա) MN || AC

բ) MN=$\frac{1}{2}$AC

գ) MN-ը կիսում է B գագաթը AC կողմին միացնող ցանկացած հատված` BE=ED (ըստ Թալեսի թեորեմի).

<u>Թալեսի թեորեմը:</u> Եթե երկու ուղիղներ հատվում են մի քանի զուգահեռ ուղիղներով, ապա ուղիղներից մեկի վրա անջատվում են հատվածներ, որոնք համեմատական են մյուս ուղղի վրա անջատված համապատասխան հատվածներին`



եթե $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$,

ապա $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}$:

Մասնավորապես, եթե

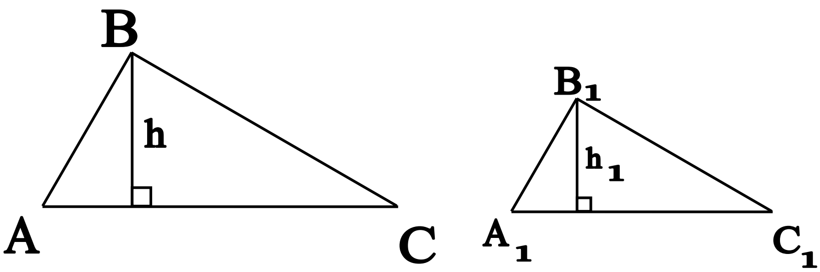
$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, ապա

$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

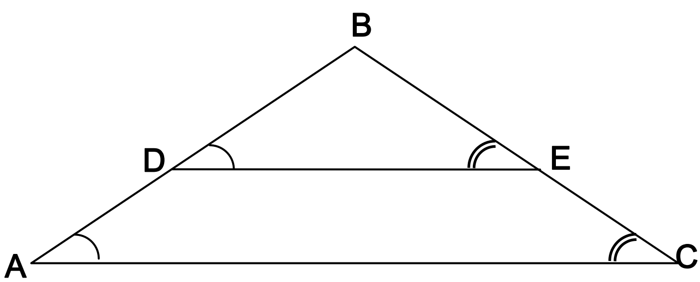
Եռանկյունների նմանության հայտանիշները.

<u>Սահմանում</u>. Երկու եռանկյուններ կոչվում են <u>նման</u>, եթե նրանց անկյունները իրար հավասար են, իսկ հավասար անկյունների դիմաց գտնվող կողմերը՝ համեմատական:

1) Եթե մի եռանկյան երկու անկյունները հավասար են մյուս եռանկյան երկու անկյուններին, ապա այդ <u>եռանկյունները նման են</u>:



2)* Եռանկյան կողմերից որևէ մեկին զուգահեռ ուղիղը այդ եռանկյունից «կտրում է» նրան նման եռանկյուն:



<u>Ապացույց.</u> $DE \| AC \Rightarrow \Delta BDE \backsim \Delta ABC$ որովհետև $\angle A = \angle D, \angle E = \angle C$, որպես DE և AC զուգահեռ ուղիղները երրորդով հատելուց առաջացած համապատասխան անկյուններ:

3) Եթե $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, ապա $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$:

4) Եթե $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ և $\angle A = \angle A_1$, ապա $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$:

Առնչություններ նման եռանկյունների մեջ.

Եթե $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, ապա

ա) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$

($\angle A=A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$), այսինքն նման եռանկյունների համապատասխան կողմերը համեմատական են (համապատասխան կամ նմանակ կոչվում են հավասար անկյունների դիմաց գտնվող կողմերը)

բ) $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{h}{h_1}$ (նման եռանկյունների կողմերը համեմատական

են նրանց տարած բարձրություններին) կամ

$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{l}{l_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{R}{R_1}$, որտեղ m,m_1,l,l_1,r,r_1,R,R_1-ը այդ

եռանկյունների համապատասխան միջնագծերը, կիսորդները, ներգծած կամ արտագծած շրջանագծերի շառավիղներն են:

գ) $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$ (նման եռանկյունների մակերեսները համեմա

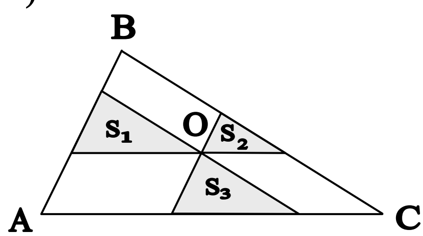
տական են համապատասխան կողմերի քառակուսիներին)

դ) $\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$, որտեղ P-ն և P_1-ը այդ եռանկյունների

պարագծերն են:

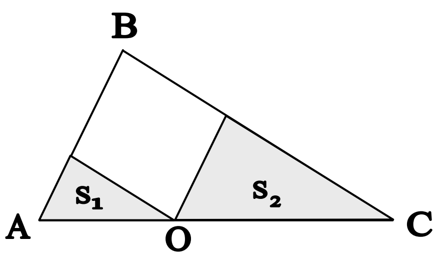
***)** Եթե եռանկյուններից մեկը նման է երկրորդին, իսկ այդ երկրորդ եռանկյունը նման է երրորդին, ապա առաջին և երրորդ եռանկյունները նման են: Իրոք, ըստ եռանկյունների նմանության սահմանման, կստացվի, որ առաջին և երրորդ եռանկյունների անկյունները հավասար են: Հետևաբար, այդ եռանկյունները կլինեն նման ըստ առաջին հայտանիշի:

****)**



Եթե եռանկյան ներսում վերցված որևէ O կետով նրա կողմերին տարված են զուգահեռ ուղիղներ, ապա

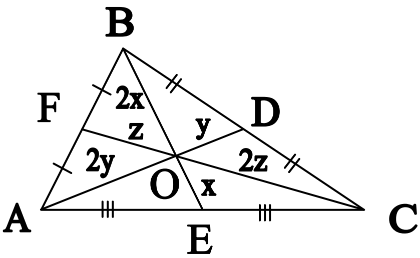
$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$,որտեղ S-ը ΔABC-ի մակերեսն է, իսկ S_1, S_2, S_3-ը ներկած եռանկյունների մակերեսները:



Մասնավորապես, եթե O կետը գտնվում է եռանկյան կողմերից որևէ մեկի վրա (օրինակ AC-ի), ապա

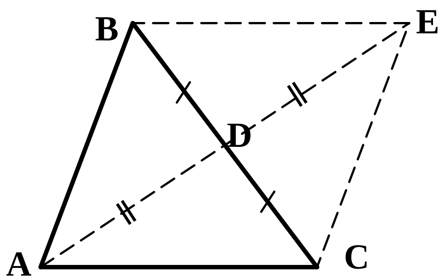
$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

Եռանկյան միջնագծերը



ա) Եռանկյան երեք միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետում բաժանվում 2:1 հարաբերությամբ (հաշված եռանկյան գագաթից)

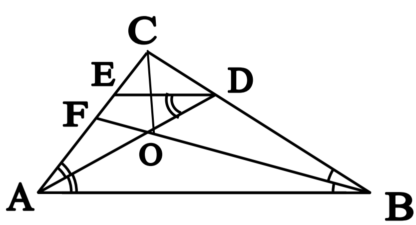
բ)* Ցանկացած միջնագծի երկարությունը կարելի է հաշվել հետևյալ առնչությունից (օրինակ AD միջնագծի համար)
$(2\cdot AD)^2+BC^2 = 2\cdot(AB^2+AC^2)$:



Իրոք, եթե AD միջնագիծը իր չափով շարունակենք՝ DE=AD, և E-ն միացնենք B-ի և C-ի հետ, ապա կստացվի ABEC զուգահեռագիծը, որովհետև եթե քառանկյան անկյունագծերը հատվում և հատման կետում կիսվում են, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Իսկ զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին:

գ)* Եռանկյունը իր երեք միջնագծերով բաժանվում է 6 հավասարամեծ եռանկյունների (Հավասարամեծ – նշանակում է հավասար մակերես ունեցող): Իրոք, ΔAOE -ն և ΔAOB -ն ունեն A գագաթից տարված նույն բարձրությունը, ուստի $\frac{S_{AOE}}{S_{AOB}}=\frac{x}{2x}\Rightarrow S_{AOE}=\frac{1}{2}\cdot S_{AOB}$: ΔAOF -ն և ΔFOB -ն ունեն O գագաթից տարված նույն բարձրությունը, ուստի $S_{AOF}=S_{OFB}$, քանի որ AF=FB: Նույն ձևով ցույց է տրվում մյուս եռանկյունների մակերեսների հավասարությունը:

Եռանկյան կիսորդները



ա) Եռանկյան երեք կիսորդները հատվում են մի կետում:

բ) $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (Եռանկյան որևէ անկյան կիսորդը այդ անկյան դիմացի կողմը բաժանում է անկյունը կազմող կողմերին համեմատական մասերի):

գ)* Եթե D կետից եռանկյան որևէ կողմին տանենք զուգահեռ (օրինակ DE||AB), ապա ստացված Δ AED-ն կլինի հավասարասրուն AE=ED (D-ն AD կիսորդի և BC կողմի հատման կետն է), որովհետև $\angle DAB = \angle ADE$, որպես ներքին խաչադիր անկյուններ:

դ)** Եթե O-ն կիսորդների հատման կետն է, ապա՝ $\frac{OD}{AO} = \frac{BC}{AB + AC}$: Իրոք՝ քանի որ BO-ն ΔABD-ի կիսորդն է, ապա $\frac{OD}{AO} = \frac{BD}{AB}$: Մյուս կողմից AD-ն ΔABC-ի կիսորդն է, որից հետևում է, որ, $\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}$; $\frac{BC - BD}{BD} = \frac{AC}{AB}$; $\frac{BC}{BD} = 1 + \frac{AC}{AB}$; $BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AB + AC}$:

ե)* $\angle AOC = 90° + \frac{\angle B}{2}$, որովհետև

$$\angle AOC = 180° - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2}\right) = 180° - \left(\frac{\angle A + \angle C}{2}\right) =$$

$$= 180° - \left(\frac{180° - \angle B}{2}\right) = 90° + \frac{\angle B}{2}$$

զ)** $AD = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$, իրոք, $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ACD}$,

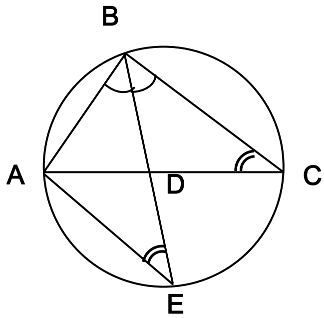
$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin\frac{A}{2};$$

$$AD \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot (AB + AC) = AB \cdot AC \cdot \sin A, \qquad AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2} \cdot (AB + AC)}$$

$$= \frac{2 \cdot AB \cdot AC\cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$$

է)** $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$

<u>Ապացույց</u>. BD կիսորդը շարունակենք մինչև Δ ABC-ի արտագծած շրջանագծի հետ E կետում հատվելը: $\Delta ABE \backsim \Delta BDC$, որովհետև $\angle ABD = \angle DBC$, իսկ $\angle E = \angle C$, որպես միևնույն AB աղեղին հենված ներգծյալ անկյուններ $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}$;



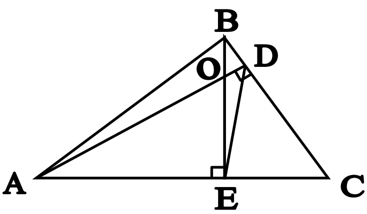
$AB \cdot BC = (BD + DE) \cdot BD \Rightarrow$

$BD^2 = AB \cdot BC - BD \cdot DE =$

$AB \cdot BC - AD \cdot DC$, որովհետև

$BD \cdot DE = AD \cdot DC$ ըստ շրջանագծի հատվող լարերի հատկության:

Եռանկյան բարձրությունները



ա) Եռանկյան բոլոր երեք <u>բարձրությունները</u> (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում (այդ կետը կարող է գտնվել նաև եռանկյունուց դուրս):

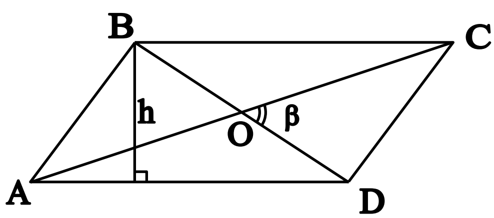
բ) $AD = \dfrac{2 \cdot S}{BC}$, որտեղ S-ը եռանկյան մակերեսն է:

գ) AC·BE=BC·AD

դ)* $\Delta DEC \backsim \Delta ABC$, որովհետև $\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{EC}{BC} = \cos C$ և $\angle C$ -ն ընդհանուր է:

Ուստի $\angle EDC=\angle BAC, \angle CED=\angle ABC$

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԻԾ, ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ, ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ, ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆ, ՑԱՆԿԱՑԱԾ ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆ



<u>Սահմանում 1</u> Այն քառանկյունը, որի հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են, կոչվում է <u>զուգահեռագիծ</u>:

Հատկությունները՝

1) Զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը և անկյունները իրար հավասար են՝ AB=CD, BC=AD, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$:

2) Որևէ կողմին առընթեր անկյունների գումարը հավասար է 180°: Օրինակ՝ $\angle A+\angle D=180°$, որպես AB և CD զուգահեռ ուղիղները AD հատողով առաջացած միակողմանի անկյուններ:

3) Զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետում կիսվում են՝ AO=OC, BO=OD:

4) Անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին՝ $AC^2+BD^2=2\cdot(AB^2+AD^2)$:

5)*Զուգահեռագիծը իր անկյունագծերով բաժանվում է 4 հավասարամեծ եռանկյունների (այսինքն հավասար մակերես ունեցող), որովհետև $\Delta AOD = \Delta BOC$ (երկու կողմերով և նրանցով կազմված անկյուններով): Իսկ $S_{AOD} = S_{COD}$, որովհետև ΔAOD և ΔCOD-ն ունեն D գագաթից տարված նույն բարձրությունը և AO=OC:

6)Զուգահեռագծի մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով S=AD·h (այսինքն մակերեսը հավասար է որևէ կողմի և այդ կողմին տարած բարձրության արտադրյալին)

S=AB·AD·sin A, S= $\frac{1}{2}$ ·AC·BD·sinβ

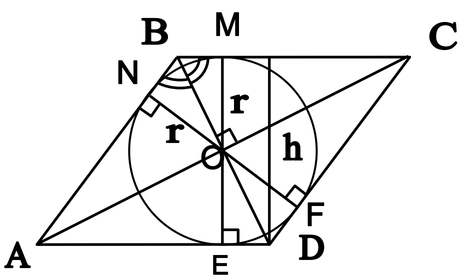
7) Զուգահեռագծի հայտանիշները.

ա) եթե քառանկյան երկու կողմերը զուգահեռ են և հավասար, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

բ) եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ հավասար են, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

գ) եթե քառանկյան անկյունագծերը հատվում և հատման կետում կիսվում են, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

դ)** Ուռուցիկ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, եթե նրա հանդիպակաց անկյունները զույգ առ զույգ հավասար են:



Սահմանում 2 Այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր կողմերը իրար հավասար են կոչվում է շեղանկյուն:

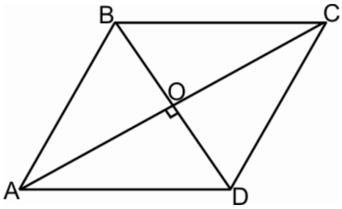
Շեղանկյունը օժտված է զուգահեռագծի բոլոր հատկություններով և լրացուցիչ՝

1)Շեղանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են (այսինքն իրար հետ կազմում են 90° անկյուն):

2) Շեղանկյան անկյունագծերը հանդիսանում են նրա անկյունների կիսորդներ:

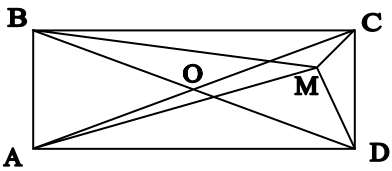
3)* Շեղանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ընդ որում նրա կենտրոնը գտնվում է անկյունագծերի հատման կետում, իսկ շառավիղը հավասար է շեղանկյան բարձրության կեսին՝ $r=\frac{h}{2}$, որովհետև OE=OF=OM=ON, ըստ անկյան կիսորդի հատկության, իսկ OE ուղիղը լինելով ուղղահայաց AD-ին, ուղղահայաց է նաև նրան զուգահեռ BC ուղղին:

4) $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$



5)* Զուգահեռագիծը շեղանկյուն է, եթե նրա անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:
Իրոք, $\Delta ABO = \Delta AOD$, որպես հավասար էջերով ուղղանկյուն եռանկյուններ $\Rightarrow AB = AD$:
6)* Զուգահեռագիծը շեղանկյուն է, եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը նրա անկյունների կիսորդ են:
Իրոք, այս դեպքում կստացվի, որ ΔABC -ում $\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow$ $\Rightarrow AB = BC$:

Սահմանում 3 Այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր անկյունները ուղիղ են (այսինքն հավասար են 90°), կոչվում է ուղղանկյուն:



Ուղղանկյունը օժտված է զուգահեռագծի բոլոր հատկություններով և լրացուցիչ՝
1) Ուղղանկյան անկյունագծերը իրար հավասար են:
2) Ուղղանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ընդ որում նրա կենտրոնը գտնվում է ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետում, իսկ շառավիղը հավասար է անկյունագծի կեսին՝ $\frac{1}{2}AC$:

3)** Եթե M-ը ուղղանկյան հարթությանը պատկանող որևէ կետ է, ապա $AM^2+MC^2=BM^2+MD^2$
4) $S=AD\cdot AB$
5) Եթե որևէ զուգահեռագծի անկյունագծերը իրար հավասար են, ապա այդ զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է:
6)* Եթե զուգահեռագծի անկյուններից մեկը ուղիղ է, ապա այն ուղղանկյուն է, որովհետև, եթե ուղիղը ուղղահայաց է զուգահեռ ուղիղներից մեկին, ապա ուղղահայաց է նաև մյուսին:
7)* Եթե քառանկյան բոլոր անկյունները ուղիղ են, ապա այդ քառանկյունը ուղղանկյուն է:
Իրոք, այդ քառանկյան հանդիպակաց կողմերը կլինեն զուգահեռ, որովհետև ուղղահայաց են քառանկյան մի կողմին, այսինքն՝ այդ կողմով հատումից առաջացած միակողմանի անկյունների գումարը 180^0 է:
Բազմանկյունը կոչվում է ուռուցիկ, եթե այն ընկած է իր ցանկացած երկու հարևան գագաթներով անցնող ուղիղներից յուրաքանչյուրի մի կողմում:
Ցանկացած ուռուցիկ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է 180°(n-2), որտեղ n-ը այդ բազանկյան կողմերի թիվն է:
Սահմանում 4 Եթե գոյություն ունի շրջանագիծ, որը շոշափում է բազմանկյան բոլոր կողմերը, ապա այն կոչվում է բազմանկյանը ներգծված շրջանագիծ: Եթե գոյություն ունի շրջանագիծ, որին

պատկանում է բազմանկյան բոլոր գագաթները, ապա այն կոչվում է բազմանկյանը <u>արտագծած շրջանագիծ</u>:

<u>Սահմանում 5</u> Եթե բազմանկյան բոլոր կողմերը իրար հավասար են և իրար հավասար են նաև այդ բազմանկյան բոլոր անկյունները, ապա այն կոչվում է <u>կանոնավոր բազմանկյուն</u>: Կանոնավոր n-անկյան մի անկյունը $=\dfrac{180\cdot(n-2)}{n}$:

3 կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյունը կոչվում է <u>կանոնավոր եռանկյուն</u>:

4 կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյունը կոչվում է <u>քառակուսի</u>:

6 կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյունը կոչվում է <u>կանոնավոր վեցանկյուն</u> և այլն:

Ցանկացած <u>կանոնավոր բազմանկյան</u> կարելի է <u>ներգծել և արտագծել շրջանագիծ</u> ընդ որում նրանց կենտրոնները համընկնում են և գտնվում են բազմանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում, իսկ այդ շրջանագծերի շառավիղները կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

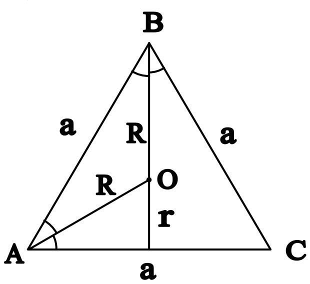
$R_{արտ}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}}$; $r_{ներ}=\dfrac{a}{2tg\dfrac{180^0}{n}}$;

որտեղ a-ն բազմանկյան կողմի երկարությունն է, իսկ n-ը՝ կողմերի թիվը:

Կանոնավոր բազմանկյան ներգծյալ շրջանագիծը բազմանկյան կողմերը շոշափում է նրանց միջնակետերում:

Մասնավոր դեպքեր.

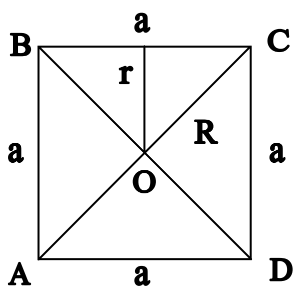
ա) Կանոնավոր եռանկյուն



$\angle A=\angle B=\angle C=60°$, AB=BC=AC=a, $\angle AOB=120°$,

$$r=\frac{a}{2tg\dfrac{180}{3}}=\frac{a}{2\sqrt{3}};\ R=\frac{a}{2\sin\dfrac{180}{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



բ) Քառակուսի

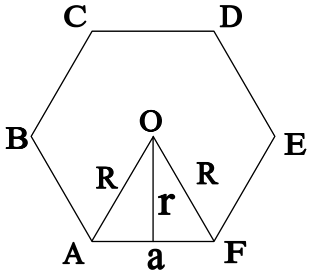
Քառակուսին օժտված է ուղղանկյան և շեղանկյան բոլոր հատկություններով:

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, AB=BC=CD=AD=a,

$$r=\frac{a}{2tg\frac{180}{4}}=\frac{a}{2};R=\frac{a}{2\sin\frac{180}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}};S=a^2$$

գ) Կանոնավոր վեցանկյուն

$\angle$A=$\angle$B=$\angle$C=$\angle$D=$\angle$E=$\angle$F=120°, AB=BC=CD=DE=EF=AF=a, $\angle$AOF=60°,



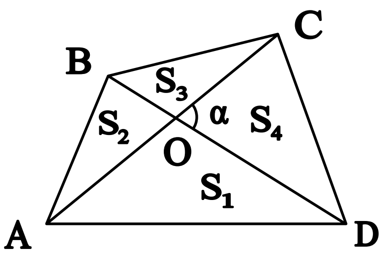
$$r=\frac{a}{2tg\frac{180}{6}}=\frac{a\sqrt{3}}{2};R=\frac{a}{2\sin\frac{180}{6}}=a,$$

$$S=6\cdot S_{AOF}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

Δ AOF-ը կանոնավոր եռանկյուն է

ՑԱՆԿԱՑԱԾ ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆ

1) Ուռուցիկ քառանկյան անկյունների գումարը 360^0 է:

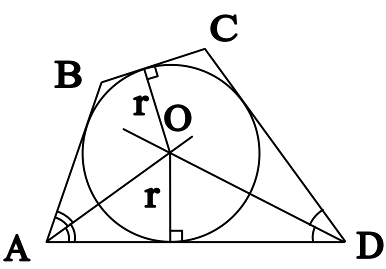


2) Քառանկյան մակերեսը

S= $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$:

3)** Եթե որևէ քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա նրա հանդիպակաց կողմերի քառակուսիների գումարները իրար հավասար են:

4)** Ցանկացած քառանկյան մեջ՝ $S_1\cdot S_3 = S_2\cdot S_4$

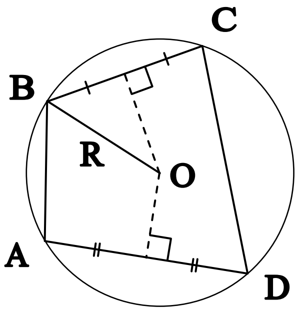


5) Եթե <u>քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ</u>, ապա՝

ա) նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են՝ AD+BC=AB+CD: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, եթե որևէ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են, ապա այդ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

բ) այդ շրջանի կենտրոնը գտնվում է քառանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում, որովհետև միայն անկյան կիսորդի վրա գտնվող կետերն են հավասարահեռ անկյան կողմերից:

գ) $r=\frac{S}{p}$, որտեղ r-ը ներգծած շրջանի շառավիղն է, S-ը մակերեսը, իսկ p-ն՝ կիսապարագիծը (այսինքն բոլոր կողմերի գումարի կեսը): <u>Այս բանաձևը ճիշտ է ցանկացած բազմանկյան համար, որին հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ:</u>



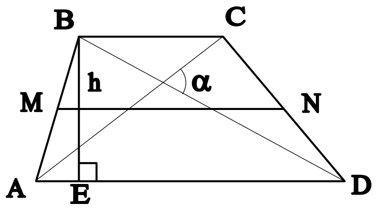
6) Եթե քառանկյանը հնարավոր է արտագծել շրջանագիծ, ապա

ա) նրա հանդիպակաց անկյունների գումարները հավասար են 180°;

$\angle A+\angle C=180°$, $\angle B+\angle D=180°$: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, եթե որևէ քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարները հավասար են 180°, ապա այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

բ) այդ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է քառանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում (O-ն կարող է գտնվել նաև քառանկյունից դուրս կամ նրա որևէ կողմի վրա), որովհետև միայն հատվածի միջնուղղահայացի վրա գտնվող կետերն են հավասարահեռ հատվածի ծայրակետերից:

ՍԵՂԱՆ



<u>Սահմանում</u> Այն քառանկյունը, որի երկու կողմերը զուգահեռ են, իսկ մյուս երկուսը ոչ, կոչվում է <u>սեղան</u>:

BC և AD զուգահեռ կողմերը կոչվում են հիմքեր, իսկ AB-ն և CD-ն՝ սրունքներ: Եթե AB=CD, ապա սեղանը կոչվում է <u>հավասարասրուն</u>: Եթե սեղանի սրունքներից մեկն ուղղահայաց է սեղանի հիմքերին, ապա այդ սեղանը կոչվում է <u>ուղղանկյուն սեղան</u>: Սեղանի սրունքների միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է <u>սեղանի միջին գիծ</u>. այն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

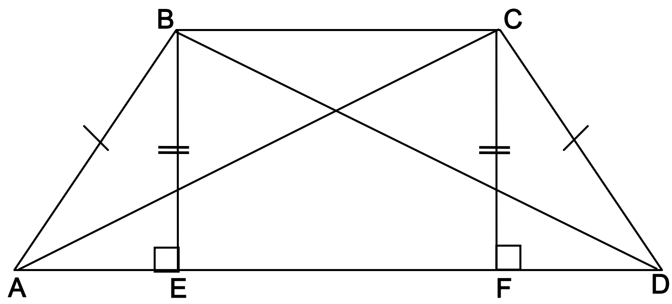
ա) $MN \parallel BC$ և $MN \parallel AD$

բ) $MN=\dfrac{BC+AD}{2}$

գ) MN-ը կիսում է BC և AD հատվածների կետերը միացնող ցանկացած հատված: (ըստ Թալեսի թեորեմի)

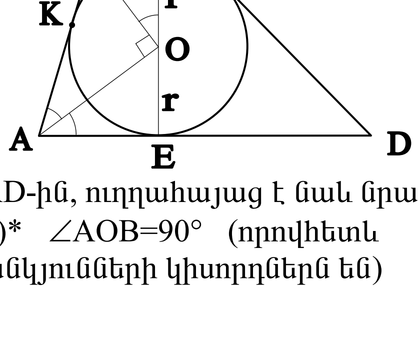
<u>Սեղանի մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝</u>

ա) $S=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot h$ (կամ որ նույնն է՝ $S=MN\cdot h$), որտեղ h-ը սեղանի բարձրությունն է (այսինքն նրա հիմքերի միջև եղած հեռավորությունը):



բ) $S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot \sin\alpha$ (որտեղ α-ն անկյունագծերով կազմված անկյունն է):

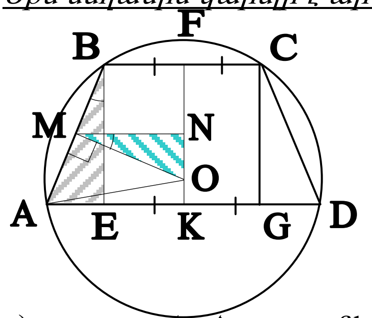
գ)* Հավասարասրուն սեղանի հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են: Դա հետևում է ΔABE-ի և ΔCFD-ի հավասարությունից, որոնք ուղղանկյուն եռանկյուններ են և AB=CD, BE=CF:
դ)* Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, եթե սեղանի հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են, ապա այդ սեղանը հավասարասրուն է: Իրոք, օրինակ, եթե $\angle A=\angle D$, ապա ABE և CFD ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունից կհետևի, որ AB=CD: Ապացուցվածից բխում է նաև, որ <u>հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը հավասար են</u>, որովհետև հավասար են ACD և ABD եռանկյունները:
ե)* Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը.
Եթե սեղանի անկյունագծերը հավասար են, ապա այդ սեղանը հավասարասրուն է:
Իրոք, նախ $\Delta ACF=\Delta BED$,, որպես հավասար ներքնաձիգ և էջ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ $\Rightarrow \angle CAD=\angle BDA \Rightarrow \Delta ACD=\Delta ABD \Rightarrow$
$\Rightarrow AB=CD$:
<u>*Եթե սեղանին հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ, ապա*</u>՝
ա) AB+CD=BC+AD (այսինքն հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են):



բ) ներգծած շրջանի կենտրոնը գտնվում է սեղանի անկյունների կիսորդների հատման կետում, որովհետև միայն անկյան կիսորդի վրա գտնվող կետերն են հավասարահեռ անկյան կողմերից:
գ) h=EF=2r, որովհետև OE շառավիղը պարունակող ուղիղը լինելով ուղղահայաց AD-ին, ուղղահայաց է նաև նրան զուգահեռ BC ուղղին:
դ)* $\angle AOB=90°$ (որովհետև $\angle A+\angle B=180°$, իսկ AO-ն և BO-ն այդ անկյունների կիսորդներն են)

ե)*$\triangle AOE \backsim \triangle BOF$ (որովհետև $\angle BOF=\angle OAE$, որպես փոխուղղահայաց կողմերով անկյուններ)
զ) AE=AK, BK=BF, CF=CM, DM=DE (K,F,M,E-ն շոշափման կետերն են), ըստ մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողների հատկության:

Եթե սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա՝



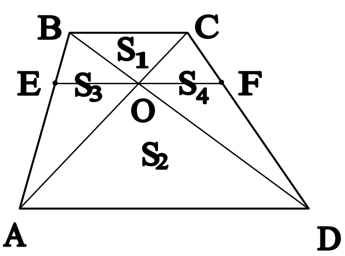
ա)* այդ սեղանը հավասարասրուն է, որովհետև ըստ լարին ուղղահայաց տրամագծի հատկության՝ CF=BF, AK=KD $\Rightarrow GD=AE \Rightarrow \Delta ABE=\Delta CGD$, որպես հավասար էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ, $\Rightarrow AB=CD$:

բ) արտագծած շրջանի կենտրոնը գտնվում է սեղանի կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում (այդ կետը կարող է գտնվել նաև սեղանից դուրս կամ նրա մեծ հիմքի վրա), որովհետև միայն հատվածի միջնուղղահայացի կետերն են հավասարահեռ հատվածի ծայրակետերից:

գ)* $\Delta ABE \backsim \Delta MNO$ ($\angle NMO=\angle ABE$, որպես փոխուղղահայաց կողմերով անկյուններ) որտեղ $MO\perp AB$, AM=MB, իսկ MN-ը միջին գծի կեսն է:
դ) $AO=R=\sqrt{AM^2+MO^2}$

Ցանկացած սեղանի մեջ տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

ա) ցանկացած կողմնային կողին առընթեր անկյունների գումարը 180° է, օրինակ՝ $\angle A+\angle B=180°$, որպես AD և BC զուգահեռ ուղիղները AB հատողով առաջացած միակողմանի անկյուններ:
բ) Սեղանի հիմքերի միջնակետով տարված ուղիղն անցնում է սրունքների շարունակությունների հատման կետով:
գ)* $S_3=S_4$, որովհետև ABC և DBC եռանկյունները ունեն նույն BC հիմքը և A և D գագաթներից տարված իրար հավասար բարձրություններ, իսկ $S_3=S_{ABC}-S_1, S_4=S_{BCD}-S_1$
դ)** $S_{սեղ}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$:



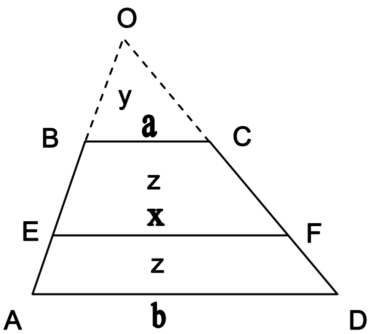
ե)* $\Delta BOC \backsim \Delta AOD$, որովհետև $\angle AOD=\angle BOC$ (որպես հակադիր անկյուններ), իսկ $\angle DBC=\angle BDA$ (որպես ներքին խաչադիր անկյուններ):
զ)** անկյունագծերի հատման O կետով անցնող և հիմքին զուգահեռ EF հատվածը O կետով կիսվում է՝ EO=OF, ընդ որում՝ $EF=\dfrac{2ab}{a+b}$, որտեղ a-ն և b-ն սեղանի հիմքերն են: Իրոք, $\Delta AEO \backsim \Delta ABC$ և

$\Delta DOF \backsim \Delta DBC \Rightarrow \frac{b}{EO}=\frac{AC}{AO}=\frac{AO+OC}{AO}=1+\frac{OC}{AO}=1+\frac{b}{a}$ $(\frac{OC}{AO}=\frac{b}{a}$,

որովհետև $\Delta BOC \backsim \Delta AOD$), ուստի $EO=\frac{ab}{a+b}$:

Նույն ձևով $\frac{b}{OF}=\frac{DB}{DO}=\frac{DO+OB}{DO}=1+\frac{OB}{DO}= =1+\frac{b}{a}$ $(\frac{OB}{DO}=\frac{b}{a}$, որովհետև

$\Delta BOC \backsim \Delta AOD$), ուստի $OF=\frac{ab}{a+b}$:



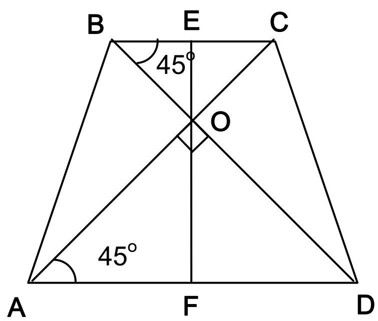
**)Սեղանի հիմքերին զուգահեռ և նրա մակերեսը երկու հավասար մասերի բաժանող հատվածի երկարությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝ $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$:

Իրոք, շարունակելով AB և CD սրունքները մինչև O կետում հատվելը կստանանք, որ $\Delta BOC \backsim \Delta EOF$ և $\Delta BOC \backsim \Delta AOD$,

ուստի եթե նշ. $S_{BOC}=y, S_{EBCF}=S_{AEFD}=z$, ապա

$$\begin{cases} \frac{z+y}{y}=\left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ \frac{2z+y}{y}=\left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z}{y}+1=\left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ 2\frac{z}{y}+1=\left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\cdot\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right)+1=\frac{b^2}{a^2};$$

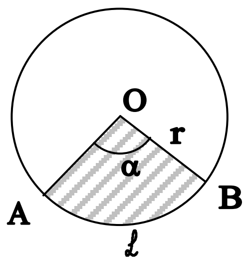
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{b^2+a^2}{2a^2};\ x=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}}$$



**)Եթե հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա նրա բարձրությունը հավասար է միջին գծին: Իրոք, $\Delta ACD=\Delta ABD$ որովհետև $\angle BAD=\angle CDA$ և այդ անկյուններըը կազմող կողմերը հավասար են, $\Rightarrow \angle OAF=\angle ODF$ և քանի որ $\angle AOD=90^\circ \Rightarrow \angle OAF=45^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow OF=AF$, նույն ձևով

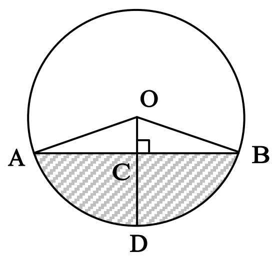
$$\angle EBO=45^\circ \Rightarrow BE=EO \Rightarrow AF+BE=OF+OE \Rightarrow \frac{AD+BC}{2}=EF:$$

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐ



AOB ստվերագծված պատկերը կոչվում է <u>շրջանային սեկտոր</u>, ընդ որում OA-ն կոչվում է սեկտորի շառավիղ, ∠AOB-ն՝ սեկտորի կենտրոնական անկյուն, իսկ ∪AB-ն՝ սեկտորի աղեղ: $L=r\cdot\alpha$, որտեղ L-ը սեկտորի աղեղի երկարությունն է, իսկ α-ն կենտրոնական անկյունը՝ չափված ռադիանով: $S_{սեկ}=\dfrac{r^2\cdot\alpha}{2}$

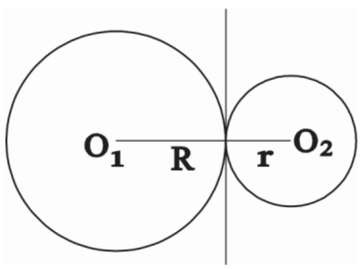
ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԳՄԵՆՏ



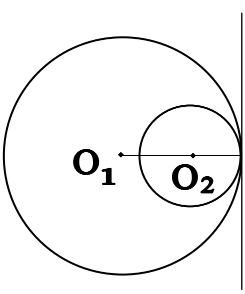
Շրջանագծի որևէ լարով և այդ լարով ձգված աղեղներից մեկով սահմանափակված պատկերը կոչվում է շրջանային սեգմենտ (նկարում՝ ստվերագծված մասն է):
AB-ն կոչվում է սեգմենտի հիմք, իսկ CD-ն՝ սեգմենտի բարձրություն: Այս նկարում պատկերված սեգմենտի մակերեսը կարելի է հաշվել այսպես՝ OADB շրջանային սեկտորի մակերեսից հանել ΔAOB-ի մակերեսը:

Երկու շրջանագծերի արտաքին և ներքին շոշափողներ

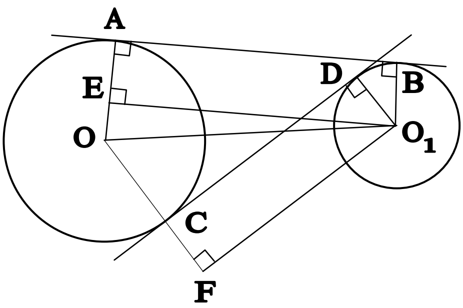
Եթե երկու շրջանագծեր ունեն մեկ ընդհանուր կետ, ապա այդ կետում նրանք ունեն ընդհանուր շոշափող:
<u>Սահմանում.</u> Կասենք, որ մեկ ընդհանուր կետ ունեցող <u>երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափում,</u> եթե նրանց կենտրոնները գտնվում են շոշափողի տարբեր կողմերում և ներքին շոշափում, եթե միևնույն կողմում:



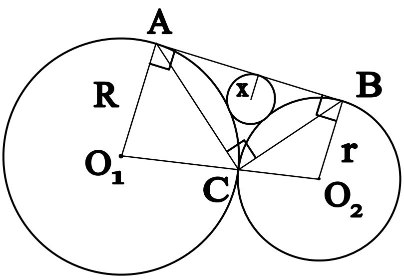
Արտաքին շոշափում
$O_1O_2=R+r$



Ներքին շոշափում
$O_1O_2=R-r$



**)AB-ն կոչվում է երկու շրջանագծերի արտաքին շոշափող, իսկ CD-ն ներքին շոշափող: Արտաքին շոշափողի հետ առնչվող խնդիրներում հարմար է տանել $O_1E||AB$ հատվածը և դիտարկել ուղղ. ΔOEO_1 (որի մեջ $O_1E=AB$), իսկ ներքին շոշափողի հետ առնչվող խնդիրներում հարմար է OC շառավիղը շարունակել $CF=DO_1$ չափով և դիտարկել ուղղանկյուն Δ OFO_1-ը (որի մեջ $FO_1=CD$):



Իրար հետ արտաքին շոշափում ունեցող երկու շրջանագծերի AB արտաքին շոշափողն ունի հետևյալ հատկությունները՝

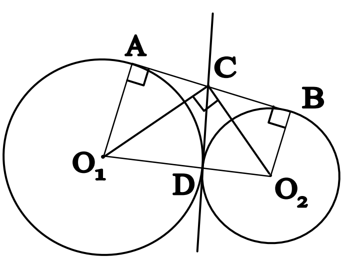
ա)** $AB=2\sqrt{R\cdot r}$

բ)** $\angle ACB=90°$, որովհետև O_1ABO_2-ը սեղան է ($O_1A||O_2B$) և եթե նշանակենք $\angle O_1=\alpha$, ապա $\angle O_2=180°-\alpha$: ΔO_1AC-ն հավասարասրուն է, ուստի

$\angle O_1CA=\dfrac{180°-\alpha}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$, նույն ձևով, O_2CB հավասարասրուն եռանկյունից՝ $\angle O_2CB=\dfrac{180°-(180°-\alpha)}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$, և քանի որ

$\angle O_1CA+\angle ACB+\angle BCO_2=180°$, ապա $\angle ACB=180°-\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)-\dfrac{\alpha}{2}=90°$:

գ)** ABC կորագիծ եռանկյանը ներգծած շրջանի x շառավիղը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝ $\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{R\cdot r}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$



դ)** Եթե C-ն շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողի և նրանց AB արտաքին շոշափողի հատման կետն է, ապա $\angle O_1CO_2=90°$, որովհետև ըստ C կետից շրջանագծերին տարված շոշափողների հատկության CO1-ը $\angle ACD$-ի կիսորդն է, իսկ CO2-ը՝ $\angle DCB$-ի:

Բայց $\angle ACD+\angle DCB=180°$, ուստի $\angle O_1CO_2=\angle O_1CD+\angle DCO_2=$ $\dfrac{\angle ACD}{2}+\dfrac{\angle DCB}{2}=\dfrac{\angle ACD+\angle DCB}{2}=\dfrac{180°}{2}=90°$: