Պարամետր պարունակող հավասարումների, հավասարումների համակարգերի և անհավասարումների լուծումը

Լուծել պարամետր պարունակող հավասարում կամ անհավասարում նշանակում է գտնել նրա լուծումների բազմությունը պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների համար:

Օրինակ 1: Լուծել $ax^2 - 1 = x + a$ հավասարումը: Այստեղ a-ն պարամետր է, որի բոլոր արժեքները թույլատրելի են: Հավասարումը բերելով $(a^2 - 1)x = a + 1$ տեսքի, տեսնում ենք, որ երբ $a^2 - 1 \neq 0$, այն ունի մեկ արմատ՝ $x = \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{1}{a-1}$: Եթե $a^2 - 1 = 0$, ապա $a = \pm 1$; $a = 1$ դեպքում ստանում ենք $0 \cdot x = 2$ հավասարումը, որն արմատ չունի, իսկ $a = -1$դեպքում կստանանք $0 \cdot x = 0$ հավասարումը, որին բավարարում են x-ի բոլոր արժեքները:

Պատ՝ եթե $a \neq \pm 1$, ապա $x = \frac{1}{a-1}$,

եթե $a = -1$, ապա $x \in (-\infty; +\infty)$,

եթե $a = 1$, ապա հավասարումը արմատ չունի:

Օրինակ 2: Լուծել հավասարումը՝

ա) $\sqrt{5x-4} = a + 1$ (10-րդ դաս. N359(ա))

Լուծում. Եթե a+1<0, ապա ϕ

եթե a+1$\geq$0, $5x - 4 = (a+1)^2$; $x = \frac{a^2 + 2a + 5}{5}$:

Պատ՝ եթե a<-1, ϕ

եթե a$\geq$-1, $x = \frac{a^2 + 2a + 5}{5}$

բ) $\sin x = 5a - 1$ (10-րդ դաս. N360(ա))

Լուծում. Եթե 5a-1>1 կամ 5a-1<-1, ապա հավասարումը լուծում չունի

Եթե $\begin{cases} 5a - 1 < 1 \\ 5a - 1 > -1 \end{cases} \ldots a \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$, ապա $x = (-1)^n \arcsin(5a-1) + \pi n,\ n \in Z$

եթե $5a - 1 = 1$; $a = \frac{2}{5}$; ապա $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

եթե $5a - 1 = -1$; $a = 0$; ապա $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

Պատ՝ եթե $a > \frac{2}{5}$ կամ $a < 0$, ապա ϕ

եթե $a \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$, $x = (-1)^n \arcsin(5a-1) + \pi n,\ n \in Z$

եթե $a = \frac{2}{5}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, եթե $a = 0$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

գ) $|2x+7| = 4a+3$ (10-րդ դաս. N360(բ))

<u>Լուծում.</u> եթե 4a+3<0, ապա ϕ

եթե 4a+3=0, $a = -\frac{3}{4}$, ապա 2x+7=0, x=$-\frac{7}{2}$

եթե 4a+3>0, ապա $\left[\begin{array}{l} 2x+7 = 4a+3 \\ 2x+7 = -4a-3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2a-2 \\ x = -2a-5 \end{array}\right.$

Պատ՝ եթե $a < -\frac{3}{4}, \phi$

եթե $a = -\frac{3}{4}$, x=$-\frac{7}{2}$

եթե $a > -\frac{3}{4}$, x=2a-2, x=-2a-5

դ) $2^{x-4} = 6-3a$ (10-րդ դաս. N360(գ))

<u>Լուծում.</u> եթե 6-3a$\le$0, ϕ

եթե 6-3a>0, $x-4 = \log_2(6-3a)$; $x = 4 + \log_2(6-3a)$

Պատ՝ եթե $a \ge 2$, ϕ

եթե a<2, $x = 4 + \log_2(6-3a)$

ե) $\sqrt{x^2-3x+2a-4} + \sqrt{2x^2-8x+3a-1} = 0$ (10-րդ դաս. N381(բ))

<u>Լուծում</u>. քանի որ քառակուսի արմատի արժեքը ոչ բացասական է, ապա այս հավասարությունը հնարավոր է միայն $\begin{cases} x^2-3x+2a-4=0 \\ 2x^2-8x+3a-1=0 \end{cases}$ դեպքում առաջին հավասարումից գտնենք a-ն և տեղադրենք երկրորդի մեջ՝

$$a = \frac{4-x^2+3x}{2}$$

$$2x^2-8x+\frac{3(4-x^2+3x)}{2}-1=0$$

$$4x^2-16x+12-3x^2+9x-2=0$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$x_1 = 5;\ x_2 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{4-5^2+3\cdot5}{2} = -3;\ a_2 = \frac{4-2^2+3\cdot2}{2} = 3$$

Պատ՝ եթե a=-3, ապա x=5
եթե a=3, ապա x=2
եթե a$\neq\pm 3$, ապա ϕ

Օրինակ 3. Գտնել $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1=0$ հավասարման արմատների քանակը՝ կախված a պարամետրից: (10-րդ դաս. էջ 118, օրինակ 3)
Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $a^2-1=0$: Այս դեպքում կունենանք հետևյալ հավասարումը.
1) $2x+1=0$, երբ a=-1; 2) 0x+1=0, երբ a=1:
1) հավասարումն ունի 1 արմատ՝ x=-1/2, իսկ
2) հավասարումն արմատ չունի:
Այն դեպքում, երբ $a\neq\pm1$, կունենանք քառակուսային հավասարում, որի դիսկրիմինանտն է՝ $D=(a-1)^2-4(a^2-1)=-3a^2-2a+5$: Դա նշանակում է, որ՝
ա) հավասարումն արմատ չունի, երբ նրա դիսկրիմինանտը փոքր է 0-ից՝ $-3a^2-2a+5<0$, այսինքն, երբ $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(1;+\infty)$:

բ) հավասարումն ունի 1 արմատ, երբ $-3a^2-2a+5=0$, որտեղից հաշվի առնելով, որ $a\neq\pm1$, ստանում ենք՝ a=-5/3:
գ) հավասարումն ունի 2 արմատ, երբ $-3a^2-2a+5>0$, այսինքն, երբ $a\in\left(-\frac{5}{3};-1\right)\cup(-1;1)$:

Պատ՝ եթե $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup[1;+\infty)$, հավասարումն արմատ չունի
եթե a=-5/3 կամ a=-1, հավասարումն ունի 1 արմատ
եթե $a\in\left(-\frac{5}{3};-1\right)\cup(-1;1)$, հավասարումն ունի 2 արմատ:

Օրինակ 4. Լուծել $(4-a^2)x\leq a-1$ անհավասարումը:
Եթե $4-a^2<0$, ապա անհավասարման 2 մասերը բաժանելով $(4-a^2)$ արտահայտության վրա, կստանանք ՝ $x\geq\frac{a-1}{4-a^2}$:

Եթե $4-a^2>0$ անհավասարման լուծումն է՝ $x\leq\frac{a-1}{4-a^2}$

Եթե $4-a^2=0$, ապա $a=\pm2$:
a=-2 դեպքում ստանում ենք $0x\leq-3$ անհավասարումը, որը լուծում չունի:
Երբ a=2, ստանում ենք $0x\leq1$ անհավասարումը, որին բավարարում են x-ի բոլոր արժեքները:

Պատ՝ եթե $a \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$, ապա $x \in \left[\frac{a-1}{4-a^2};+\infty\right)$

եթե $a \in (-2;2)$, ապա $x \in \left(-\infty;\frac{a-1}{4-a^2}\right]$

եթե a=-2, ապա անհավասարումը լուծում չունի

եթե a=2 , ապա $x \in (-\infty;+\infty)$

<u>Օրինակ 5.</u> Լուծել $ax^2 - 2ax + 1 > 0$ (1) անհավասարումը:

Հեշտ է տեսնել, որ a=0 դեպքում անհավասարմանը բավարարում են x-ի բոլոր արժեքները՝ $0x^2 - 0x + 1 > 0, \quad 0x > -1, \; x \in (-\infty;+\infty)$

$a \neq 0$ դեպքում անհավասարման ձախ մասը քառակուսային եռանդամ է, որի դիսկրիմինանտն է՝ $D = 4a^2 - 4a = 4a(a-1)$

Ինչպես գիտենք (1)-ի լուծումը կախված է a-ի և D-ի նշաններից. քննարկենք բոլոր հնարավոր դեպքերը՝

ա) $\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \end{cases}$ բ) $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$ գ) $\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \end{cases}$ դ) $\begin{cases} a < 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$

ա) $\begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 - 4a \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ a \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty) \end{cases}$ $a \in [1;+\infty)$, այս դեպքում (1)-ի պատասխանն է՝ $(-\infty;x_1) \cup (x_2;+\infty)$, որտեղ $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - a}}{a}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - a}}{a}$

բ) $\begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 - 4a < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (0,1)$, այս դեպքում (1)-ի պատասխանն է՝ $(-\infty;+\infty)$

գ) $\begin{cases} a < 0 \\ 4a^2 - 4a > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty,0)$, այս դեպքում (1)-ի պատասխանն է՝ $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a}}{a};\frac{a - \sqrt{a^2 - a}}{a}\right)$

դ) $\begin{cases} a < 0 \\ 4a^2 - 4a \leq 0 \end{cases}$ ϕ, այս դեպքը հնարավոր չէ:

Պատ՝ եթե $a \in (-\infty;0)$, ապա $x \in \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a}}{a};\frac{a - \sqrt{a^2 - a}}{a}\right)$

եթե $a \in [0,1)$, ապա $x \in (-\infty;+\infty)$

եթե $a \in [1;+\infty)$, ապա $x \in \left(-\infty; \frac{a-\sqrt{a^2-a}}{a}; \frac{a+\sqrt{a^2-a}}{a}; +\infty\right)$

Օրինակ 6. Լուծել անհավասարումը.

ա) $\sqrt{2x+16} \ge a-4$ (10-րդ դաս. N387 (բ))

Լուծում. եթե $a-4 \ge 0$, ապա $2x+16 \ge (a-4)^2$, $x \ge \frac{a^2-8a}{2}$

եթե $a-4<0$, ապա անհավասարությունը ճիշտ է ԹԱԲ-ին պատկանող բոլոր x-երի համար՝

$2x+16 \ge 0; x \ge -8$

Պատ՝ եթե $a \ge 4$, ապա $x \ge \frac{a^2-8a}{2}$

եթե $a<4$, ապա $x \ge -8$

բ) $\sqrt{x-1} < 4a$ (10-րդ դաս. N387 (ա))

Լուծում. եթե $4a \le 0$, ապա ϕ

եթե 4a>0, ապա $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1 < 16a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1 \\ x < 1+16a^2 \end{cases}$ $x \in [1; 1+16a^2)$

Պատ՝ եթե $a \le 0$, ϕ

եթե $a>0$, $x \in [1;\ 1+16a^2)$

գ) $(0.2)^x < 1-a^2$ (10-րդ դաս. N388 (գ))

Լուծում. եթե $1-a^2 \le 0$, այսինքն $a \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$, ապա ϕ

եթե $1-a^2>0$, այսինքն $a \in (-1;1)$, ապա $x > \log_{0.2}(1-a^2)$,

(քանի որ 0.2<1):

Պատ՝ եթե $a \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$, ապա ϕ

եթե $a \in (-1;1)$, ապա $x \in (\log_{0.2}(1-a^2);+\infty)$

դ) $2^{x-2} > a-1$ (10-րդ դաս. N388 (ա))

Լուծում. եթե $a-1 \le 0$, ապա $x \in (-\infty;+\infty)$

եթե $a-1>0$, ապա $x-2 > \log_2(a-1)$; $x > 2+\log_2(a-1)$

Պատ՝ եթե $a \le 1$, ապա $x \in (-\infty;+\infty)$

եթե $a>1$, ապա $x > 2+\log_2(a-1)$

<u>Համակարգերի լուծում</u>

<u>Օրինակ 1:</u> Լուծել $\begin{cases} mx+ny=8 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ համակարգը:

Այստեղ գործ ունենք 2՝ m և n պարամետրերի հետ: Գտնելով y-ը II հավասարումից և տեղադրելով I-ի մեջ, ստանում ենք.

$$\begin{cases} mx+ny=8 \\ y=(4-5x)/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3mx+n(4-5x)=24 \\ y=(4-5x)/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-5n)x=24-4n \\ y=(4-5x)/3 \end{cases}$$

Քանի որ x-ի ցանկացած արժեքների դեպքում II հավասարումն ունի միակ լուծում (ըստ y-ի), ուրեմն համակարգի լուծումների գոյությունը և նրանց քանակը որոշվում է I հավասարումով $\Rightarrow$

եթե $3m-5n\neq 0$, ապա համակարգը ունի միակ լուծում, $x=\dfrac{24-4n}{3m-5n}$,

$$y=\frac{1}{3}\left(4-\frac{5(24-4n)}{3m-5n}\right)=\cdots=\frac{4m-40}{3m-5n}$$

եթե $\begin{cases} 3m-5n=0 \\ 24-4n=0 \end{cases}$, $\Rightarrow n=6, m=10$ ապա համակարգն ունի անթիվ բազմու-

թյամբ լուծումներ՝ $\begin{pmatrix} x\in(-\infty;+\infty) \\ y=\dfrac{4-5x}{3} \end{pmatrix}$

եթե $\begin{cases} 3m-5n=0 \\ 24-4n\neq 0 \end{cases}$, ապա համակարգը լուծում չունի:

Պատ՝ եթե $3m-5n\neq 0$, ապա համակարգը ունի միակ լուծում՝ $x=\dfrac{24-4n}{3m-5n}$,

$$y=\frac{4m-40}{3m-5n}$$

եթե n=6, m=10, ապա համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝

$$\left(x;\frac{4-5x}{3}\right); x\in R$$

եթե $\begin{cases} 3m-5n=0 \\ n\neq 6 \end{cases}$, ապա համակարգը լուծում չունի:

<u>Օրինակ 2: (8-րդ դաս, էջ 140 N9)</u>

ա) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{y}=a \\ 1+\dfrac{xy}{a+1}=a^2 \end{cases}$ Այստեղ a-ի թույլատրելի արժեքներն են՝ $a\neq -1$

1-ին հավասարումից x-ը արտահայտենք y-ով և տեղադրենք 2-ի մեջ՝

$$\frac{x+y-ay}{y}=0 \quad \begin{cases} x=(a-1)y \\ y\neq 0 \end{cases} \quad (a-1)y\cdot y=(a^2-1)(a+1)$$

$$(a-1)y^2=(a^2-1)(a+1) \; (1)$$

եթե $a-1=0$, $0\cdot y^2=0$ $y\in(-\infty;+\infty)$, $y\neq 0$, $x=0$

եթե $a-1\neq 0$, (1)-ից կստանանք $y^2=(a+1)^2$, $y=\pm(a+1)$, $x=\pm(a-1)(a+1)$

Պատ՝ եթե $a=1$, $\begin{pmatrix} x=0 \\ y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty) \end{pmatrix}$

եթե $a\neq 1, a\neq -1$, $\begin{pmatrix} x=a^2-1 \\ y=a+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x=-(a^2-1) \\ y=-(a+1) \end{pmatrix}$

9(գ)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{a+b}{y}=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{a+b}{y}=0 \\ y=x \end{cases}$$

Այստեղ պարամետրի թույլատրելի արժեքներն են՝ $a\neq b$: Երկրորդ հավասարումից y-ի արժեքը տեղադրելով առաջինի մեջ կստանանք՝ $\dfrac{x^2-(a^2-b^2)}{x(a-b)}=0$ $\begin{cases} x^2=a^2-b^2 \\ x(a-b)\neq 0 \end{cases}$, այստեղից եթե՝

$a^2-b^2\leq 0,\ \phi$

եթե $a^2-b^2>0,\ x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$

Պատ՝ Եթե $a^2-b^2\leq 0,\ \phi\ (a\neq b)$

եթե $a^2-b^2>0$, $\begin{pmatrix} x=\sqrt{a^2-b^2} \\ y=\sqrt{a^2-b^2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x=-\sqrt{a^2-b^2} \\ y=-\sqrt{a^2-b^2} \end{pmatrix}$

8-րդ դաս էջ147, N13ա

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{c} \\ \dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{y^2}=0 \end{cases}$$

Այստեղ պարամետրի թույլատրելի արժեքներն են՝ $c\neq 0$

Համակարգի երկրորդ հավասարումից՝ $\begin{cases} ay^2-bx^2=0 \; (1) \\ x^2y^2\neq 0 \end{cases}$

եթե a=b=0, ապա (1)-ին կբավարարեն x-ի և y-ի ցանկացած 0-ից տարբեր արժեքներ, իսկ համակարգի առաջին հավասարումից կստանանք

$\frac{1}{x}=\frac{1}{c}-\frac{1}{y}$ և այս հավասարման լուծում կհանդիսանա ցանկացած (x,y) թվազույգ, որտեղ $y\neq c,\ \ y\neq 0$, $x=1:\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{y}\right)=\frac{cy}{y-c}$;

Եթե $a=b\neq 0$, ապա (1)-ից կստանանք $y^2=x^2\Rightarrow y=\pm x;$ y=-x դեպքում համակարգի առաջին հավասարումը լուծում չունի, իսկ y=x դեպքում կստացվի հետևյալ համակարգը՝ $\begin{cases} y=x \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c} \end{cases}$ $\frac{2}{x}=\frac{1}{c}$; $x=2c,\ \ y=2c$

Պարզ է նաև, որ եթե $(a=0,\ b\neq 0)$ կամ $(a\neq 0,\ b=0)$ համակարգի երկրորդ հավասարումը լուծում չունի:

Մնում է քննարկել $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$ դեպքը: Այս դեպքում (1)-ից կստանանք՝ $y^2=\frac{b}{a}x^2$: Եթե $\frac{b}{a}<0,$ ապա այս հավասարությունը հնարավոր չէ, որով-հետև $x\neq 0, y\neq 0$

Եթե $\frac{b}{a}>0$ կստանանք՝ $y=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}x$ և տեղադրելով սկզբնական համակարգի առաջին հավասարման մեջ կստանանք՝

$$\begin{cases} y=\sqrt{\frac{b}{a}}x \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c} \end{cases} \qquad \text{և} \qquad \begin{cases} y=-\sqrt{\frac{b}{a}}x \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

$\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=\frac{1}{c}$ $\qquad$ $\frac{1}{x}\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=\frac{1}{c}$ (այստեղ $1-\sqrt{\frac{a}{b}}\neq 0$, որովհետև $a\neq b$)

$$x=c\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \qquad x=c\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$y=\sqrt{\frac{b}{a}}c\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=c\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right) \qquad y=\sqrt{\frac{b}{a}}c\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=c\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

Պատ՝ եթե a=0, b=0 ապա $\begin{pmatrix} x=\frac{cy}{y-c} \\ y\neq c,\ \ y\neq 0 \end{pmatrix}$ այսինքն y-ը 0-ից և c-ից

տարբեր ցանկացած թիվ է

եթե $a=b\neq 0$, ապա $\begin{pmatrix} x=2c \\ y=2c \end{pmatrix}$, $(c\neq 0)$

եթե $a=0, b\neq 0$ կամ $a\neq 0, b=0$, ապա ϕ

եթե $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$և $\frac{b}{a}<0,$ ապա ϕ

եթե $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$ և $\frac{b}{a}>0$, ապա $\begin{pmatrix} x=c\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \\ y=c\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x=c\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \\ y=c\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

<u>8-րդ դաս. էջ155, N 9(բ)</u>

$\begin{cases} x\left(1+\frac{x}{y}\right)=a \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right)=b \end{cases}$ Այստեղ a-ն և b-ն կարող են ընդունել ցանկացած արժեքներ.

$\begin{cases} \frac{x}{y}(x+y)=a \\ \frac{y}{x}(x+y)=b \end{cases}$ (1) Քանի որ $x\neq 0, y\neq 0$, ապա առաջին հավասարումից՝

$x+y=\frac{ay}{x}$, տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$a\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2=b$ (2): Եթե $a=0, b\neq 0$ կամ $a\neq 0, b=0$, ապա ϕ

եթե a=0, b=0, ապա (2)-ը տեղի ունի ցանկացած 0-ից տարբեր x և y թվերի համար, իսկ (1) համակարգի առաջին հավասարումից կստանանք x=-y, այսինքն այս դեպքում համակարգի լուծումների բազմությունն է՝ $\begin{pmatrix} x=-y \\ y\neq 0 \end{pmatrix}$, այսինքն y-ը ցանկացած 0-ից տարբեր թիվ է:

եթե $a=b\neq 0$, ապա (2)-ից՝ $y=\pm x$

y=-x դեպքը հնարավոր չէ, որովհետև համակարգի առաջին հավասարու-մից կստացվի a=0, իսկ y=x դեպքում կստացվի $x\left(1+\frac{x}{x}\right)=a\quad x=\frac{a}{2},\ y=\frac{a}{2}$:

Մնում է քննարկել $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$ դեպքը: այս դեպքում (2)-ից կստացվի $\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{b}{a}$, ուստի եթե $\frac{b}{a}<0$, $\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{b}{a}$ հավասարությունը հնարավոր չէ:

եթե $\frac{b}{a}>0$, ապա $\frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ և տեղադրելով սկզբնական համակարգի առաջին հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\begin{cases} y=\sqrt{\frac{b}{a}}x \\ x\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=a \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} y=\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{a}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ x=\frac{a}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} y=-\sqrt{\frac{b}{a}}x \\ x\left(1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=a \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} y=-\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{a}{1-\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ x=\frac{a}{1-\sqrt{\frac{a}{b}}} \end{array}\right)$$, այստեղ $1-\sqrt{\frac{a}{b}}\neq 0$, որովհետև $a\neq b$

Պատ՝ Եթե $a=0, b\neq 0$ կամ $a\neq 0, b=0$, ապա ϕ

եթե a=0, b=0, ապա $\left(\begin{array}{l} x=-y \\ y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty) \end{array}\right)$

եթե $a=b\neq 0$, ապա $\left(\begin{array}{l} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2} \end{array}\right)$

եթե $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$ և $\frac{b}{a}<0$, ապա ϕ

եթե $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ և $\frac{b}{a} > 0$, ապա $\begin{pmatrix} x = \dfrac{a}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ y = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \dfrac{a}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = \dfrac{a}{1-\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ y = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \dfrac{a}{1-\sqrt{\frac{a}{b}}} \end{pmatrix}$

9(ա)

$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{a}{b} \\ xy = \left(a^2 - b^2\right)^2 \end{cases}$ Այստեղ պարամետրի թույլատրելի արժեքներն են՝ $b \neq 0$

Համակարգի առաջին հավասարումից՝ $\dfrac{b\sqrt{x}+b\sqrt{y}-a\sqrt{x}+a\sqrt{y}}{b\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = 0$

$\begin{cases} (b+a)\sqrt{y} = (a-b)\sqrt{x} \quad (1) \\ b\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) \neq 0 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$

Եթե (1)-ում a-b=0, a+b$\neq 0$, ապա կստացվի y=0 և սկզբնական համակարգին կբավարարի x-ի ցանկացած 0-ից մեծ արժեք, որովհետև համակարգը կլինի՝ $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \\ 0x = 0 \end{cases}$

Նման ձևով, եթե a+b=0, a-b$\neq 0$, ապա (1)-ից կստացվի x=0 և համակարգին կբավարարի y-ի ցանկացած 0-ից մեծ արժեք, որովհետև կստացվի՝

$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{-\sqrt{y}} = -1 \\ 0y = 0 \end{cases}$

a+b=0, a-b=0 դեպքը հնարավոր չէ, որովհետև կստացվի a=0, b=0, իսկ ունենք որ b$\neq 0$:

Մնում է քննարկել a-b$\neq 0$, a+b$\neq 0$ դեպքը: Այս դեպքում (1)-ից կստանանք՝ $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \dfrac{a-b}{a+b}$:

Ուստի եթե $\frac{a-b}{a+b}<0,$ ապա համակարգը լուծում չունի, իսկ եթե $\frac{a-b}{a+b}>0,$ ապա $y=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 x$, տեղադրելով սա համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝ $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}x^2=\left(a^2-b^2\right)^2,$ այստեղից $x^2=(a+b)^4; x=\pm(a+b)^2$, $x=-(a+b)^2<0$ չի բավարարում, քանի որ $x\geq 0$

Պատ՝ եթե a-b=0, a+b$\neq 0$, ապա $\begin{pmatrix} x\in(0;+\infty) \\ y=0 \end{pmatrix}$

եթե a+b=0, a-b$\neq 0$, ապա $\begin{pmatrix} x=0 \\ y\in(0;+\infty) \end{pmatrix}$

եթե a-b$\neq 0$, a+b$\neq 0$, $\frac{a-b}{a+b}<0,$ ապա ϕ

եթե a-b$\neq 0$, a+b$\neq 0$, $\frac{a-b}{a+b}>0,$ ապա $\begin{pmatrix} x=(a+b)^2 \\ y=(a-b)^2 \end{pmatrix}$

<u>10ա</u>

$\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=a \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a} \end{cases}$ Այստեղ պարամետրի թույլատրելի արժեքներն են a$\neq 0$

1-ին հավասարումից հանենք 2-ը՝

$-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a-\frac{1}{a}$ նշ. $\frac{y}{x}=t$ $\begin{pmatrix} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{pmatrix}$

$t-\frac{1}{t}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=0$ $\qquad t^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)t-1=0,\ t\neq 0$

$$D=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4=a^2+2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$$

$$t_1=\frac{a-\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a}}{2}=a,\quad t_2=\frac{a-\frac{1}{a}-\left(a+\frac{1}{a}\right)}{2}=-\frac{1}{a}$$

Այսպիսով, ստանում ենք երկու համակարգ՝

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = a \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{a} \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$ax^2 = a + \dfrac{1}{a}$ $\qquad -\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a};\ \dfrac{x^2}{a} = 0$ հնարավոր չէ, որովհետև $x \neq 0$

$x^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2}$ $\qquad x = \pm\sqrt{1 + \dfrac{1}{a^2}}$

Պատ՝ a-ի ցանկացած թույլատրելի արժեքների համար $(a \neq 0)$, համակարգը ունի երկու լուծում՝ $\begin{pmatrix} x = \sqrt{1 + \dfrac{1}{a^2}} \\ y = a\sqrt{1 + \dfrac{1}{a^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = -\sqrt{1 + \dfrac{1}{a^2}} \\ y = -a\sqrt{1 + \dfrac{1}{a^2}} \end{pmatrix}$

10ք

$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = a^2 \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = b^2 \end{cases}$ Այստեղ a և b պարամետրերը կարող են ընդունել ցանկացած արժեք

$\begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2}{y} = a^2 \\ \dfrac{y^3 + x^2y}{x} = b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y}\left(x^2 + y^2\right) = a^2 \\ \dfrac{y}{x}\left(x^2 + y^2\right) = b^2 \end{cases}$ (1) քանի որ $x \neq 0, y \neq 0$, ապա առաջին հավասարումից՝ $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 y}{x}$, տեղադրելով երկրորդի մեջ կստանանք՝

$$a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = b^2 \, (2)$$

Այստեղից, եթե a=0, b$\neq$0, կամ b=0, a$\neq$0, ապա ϕ, որովհետև $x \neq 0, y \neq 0$
եթե a=0, b=0, ապա (1)-ից հետևում է, որ համակարգը լուծում չունի;
մնում է քննարկել a$\neq$0, b$\neq$0 դեպքը:

Այս դեպքում (2)-ից $\Rightarrow\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}=\frac{|b|}{|a|}$, որովհետև (1)-ի 2-րդ հավասարումից $\Rightarrow\frac{y}{x}>0$

Այսպիսով, պետք է լուծել $\begin{cases} y=\frac{|b|}{|a|}x \\ \frac{y}{x}\left(x^2+y^2\right)=b^2 \end{cases}$ համակարգը: Տեղադրելով, կստանանք՝ $\left|\frac{b}{a}\right|x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=b^2$, $x^2=\frac{|b|\left|a^3\right|}{a^2+b^2}$, $x=\pm|a|\sqrt{\frac{|ab|}{a^2+b^2}}$

Պատ՝ եթե a և b թվերից գոնե մեկը 0 է, համակարգը լուծում չունի՝ ϕ

եթե $a\neq 0$, $b\neq 0$, ապա համակարգը ունի երկու լուծում՝

$$\left(\begin{matrix} x=|a|\sqrt{\frac{|ab|}{a^2+b^2}} \\ y=|b|\sqrt{\frac{|ab|}{a^2+b^2}} \end{matrix}\right),\quad \left(\begin{matrix} x=-|a|\sqrt{\frac{|ab|}{a^2+b^2}} \\ y=-|b|\sqrt{\frac{|ab|}{a^2+b^2}} \end{matrix}\right)$$

<u>8-րդ դաս, էջ 160, N7</u>

$\begin{cases} x^2+xy+xz=a \\ y^2+xy+yz=b \\ z^2+xz+yz=c \end{cases}$ Այստեղ a, b, c պարամետրերը կարող են ընդունել ցանկացած արժեք

$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}$ (1) Գումարելով այս երեք հավասարումները, կստանանք՝

$(x+y+z)^2=a+b+c$

Ուստի եթե a+b+c<0, ապա ϕ

Եթե a+b+c>0, ապա $x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}$ և համակարգն ունի երկու լուծում՝

$$\begin{pmatrix} x = \dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{a+b+c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x = -\dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = -\dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = -\dfrac{c}{\sqrt{a+b+c}} \end{pmatrix}$$

եթե a+b+c=0 $\Rightarrow x+y+z=0$ և (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $\begin{cases} 0x = a \\ 0y = b \\ 0z = c \end{cases}$:

Ուստի եթե a, b, c թվերից գոնե մեկը 0-ից տարբեր է, համակարգը լուծում չունի, իսկ եթե a=0, b=0, c=0, ապա համակարգի լուծում հանդիսանում է (x, y, z) թվերի ցանկացած եռյակ, որոնց գումարը 0 է:
Պատ՝ եթե a+b+c<0, ապա համակարգը լուծում չունի՝ ϕ

եթե a+b+c=0 և a, b, c թվերից գոնե մեկը 0-ից տարբեր է, ապա ϕ

եթե a=0, b=0, c=0, ապա $\begin{pmatrix} x \in (-\infty;+\infty) \\ y \in (-\infty;+\infty) \\ z = -x-y \end{pmatrix}$

եթե a+b+c>0, ապա $\begin{pmatrix} x = \dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{a+b+c}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = -\dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = -\dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = -\dfrac{c}{\sqrt{a+b+c}} \end{pmatrix}$

Ֆունկցիայի արժեքների բազմության որոշումը

<u>Օրինակ 1:</u> Գտնել $f(x)=2x+\frac{3}{x}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը: (9-րդ դաս. N176)

Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը բաղկացած է այնպիսի b թվերից, որոնց համար գոյություն ունի f(x)=b հավասարությանը բավարարող որևէ x թիվ: Հետևաբար, պետք է գտնել b պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում՝ $2x+\frac{3}{x}=b$ հավասարումն արմատ ունի: Այստեղից ստանում ենք $2x^2-bx+3=0$ հավասարումը, որը կունենա արմատ, եթե նրա դիսկրիմի-նանտը մեծ կամ հավասար լինի 0-ի՝ $b^2-24\geq 0$, այսինքն $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{6}\right]\cup\left[2\sqrt{6};+\infty\right)$

Պատ՝ $E(f)=\left(-\infty;-2\sqrt{6}\right]\cup\left[2\sqrt{6};+\infty\right)$

($E(f)$-ով ընդունված է նշանակել $f(x)$-ի արժեքների բազմությունը):

<u>Օրինակ 2</u>: Գտնել ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը.

ա) $y=\sqrt{50-2x^2}$ (9-րդ դաս. N 176 (բ))

<u>Լուծում.</u> պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\sqrt{50-2x^2}=b$ հավասարումը լուծում ունի: Դրա համար նախ պետք է $b\geq 0$, այդ դեպքում կստանանք՝ $50-2x^2=b^2$, $x^2=\frac{50-b^2}{2}$, որը լուծում ունի, եթե $\frac{50-b^2}{2}\geq 0$

Այսպիսով, լուծելով $\begin{cases} b\geq 0 \\ \frac{50-b^2}{2}\geq 0 \end{cases}$ համակարգը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

բ) $y=0.1^{x^2}$ (9-րդ դաս. N406 (բ))

<u>Լուծում.</u> պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $0.1^{x^2}=b$ հավասարումը լուծում ունի: Իսկ $x^2=\log_{0.1}b$ հավասարումը լուծում ունի, եթե $\log_{0.1}b\geq 0$ և այլն

գ) $y=\lg(10-|x|)$ (9-րդ դաս. N492 (դ))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\lg(10-|x|)=b$ հավասարումը լուծում ունի: $10-|x|=10^b; |x|=10-10^b$, իսկ այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $10-10^b \ge 0$ և այլն:

դ) $y=\frac{3}{8}ctg^2x+1$ (9-րդ դաս.N560 (բ))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\frac{3}{8}ctg^2x+1=b$ հավասարումը լուծում ունի. $ctg^2x=\frac{8}{3}(b-1)$, իսկ այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $\frac{8}{3}(b-1)\ge 0$ և այլն:

ե) $y=2.5|\sin 3x|+3$ (9-րդ դաս. N560 (գ))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $2.5|\sin 3x|+3=b$ հավասարումը լուծում ունի: $|\sin 3x|=\frac{b-3}{2.5}$, իսկ այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $\begin{cases}\frac{b-3}{2.5}\ge 0\\ \frac{b-3}{2.5}\le 1\end{cases}\cdots$ և այլն

զ) $y=1-\sqrt{\sin 2x}$ (9-րդ դաս. N562 (ա))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $1-\sqrt{\sin 2x}=b$ հավասարումը լուծում ունի: $\sqrt{\sin 2x}=1-b$ հավասարումը լուծում ունի, եթե $\begin{cases}1-b\ge 0\\ 1-b\le 1\end{cases}\cdots$ և այլն

է) $y=3^{\sin x}-\frac{1}{3}$ (9-րդ դաս. N406 (գ))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $3^{\sin x}-\frac{1}{3}=b$ հավասարումը լուծում ունի. $3^{\sin x}=\frac{1}{3}+b;\ \sin x=\log_3\left(\frac{1}{3}+b\right)$ այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $\begin{cases}\log_3\left(\frac{1}{3}+b\right)\ge -1\\ \log_3\left(\frac{1}{3}+b\right)\le 1\end{cases}\cdots$ և այլն

ը) $y=\frac{2x-1}{|x|+1}$ (10-րդ դաս N 371 (բ))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\frac{2x-1}{|x|+1}=b$ հավասարումը լուծում ունի: Այս հավասարումը համարժեք է $2x-1=b(|x|+1)$ հավասարմանը: Քննարկենք երկու դեպք՝ $x\geq 0$ և $x\leq 0$

1) $\begin{cases} x\geq 0 \\ (2-b)x=1+b \end{cases}$, քանի որ b=2 դեպքում այս հավասարումը լուծում չունի,

ապա եթե $b\neq 2,\ x=\frac{1+b}{2-b}$ և պետք է տեղի ունենա $\frac{1+b}{2-b}\geq 0 \cdots, b\in[-1;2)$

2) $\begin{cases} x\leq 0 \\ (2+b)x=1+b \end{cases}$, քանի որ b=-2 դեպքում այս հավասարումը լուծում չունի,

ապա եթե $b\neq -2,\ x=\frac{1+b}{2+b}$ և պետք է տեղի ունենա $\frac{1+b}{2+b}\leq 0 \cdots b\in(-2;-1]$

Պատ՝ $E(y)=(-2;-1]\cup[-1;2)=(-2;2)$

բ) $y=\frac{2^x-1}{2^{2x}+2^x}$ (10-րդ դաս. N371 (գ))

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\frac{2^x-1}{2^{2x}+2^x}=b$ հավասարումը լուծում ունի: Քանի որ $2^{2x}+2^x\neq 0$, կստանանք

$b2^{2x}+(b-1)2^x+1=0$ (1)

Եթե b=0, կստանանք $2^x=1;\ x=0$, այսինքն b=0-ն բավարարում է խնդրի պայմանին

Եթե $b\neq 0$, նշ. $2^x=t$ և (1)-ի երկու մասը բաժանենք b-ի:

$$(2)\ t^2+\left(1-\frac{1}{b}\right)t+\frac{1}{b}=0$$

Խնդրի պահանջը կայանում է նրանում, որ ստացված քառակուսի հավասարումը (t-ի նկատմամբ) ունենա <u>գոնե մեկ դրական արմատ</u>, իսկ դա իր հերթին նշանակում է, որ (2)-ի մեծ արմատը դրական է, այսինքն՝

$$-\left(1-\frac{1}{b}\right)+\sqrt{\left(1-\frac{1}{b}\right)^2-\frac{4}{b}}>0$$

Լուծելով այս իռացիոնալ անհավասարությունը և ստացված պատասխանին ավելացնելով b=0 կետը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

<u>Օրինակ 3:</u> Տրված է $f(x)=x^2+6x+10$ և $g(x)=\sin x$: Գտնել F բարդ ֆունկցիայի բանաձևը և արժեքների տիրույթը, եթե

ա) $F(x)=f(f(x))$ (10-րդ դաս. N153)

<u>Լուծում.</u> $F(x)=(f(x))^2+6f(x)+10=(f(x)+3)^2+1=((x+3)^2+4)^2+1$

Ուստի պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $\left((x+3)^2+4\right)^2+1=b$ հավասարումը լուծում ունի:
$\left((x+3)^2+4\right)^2=b-1$, նախ պետք է $b-1\geq 0$, այս դեպքում

$(x+3)^2+4=\pm\sqrt{b-1}$, այստեղից` $\left[\begin{array}{l}(x+3)^2=\sqrt{b-1}-4\\(x+3)^2=-\sqrt{b-1}-4\end{array}\right.$ այս համախմբի

երկրորդ հավասարումը լուծում չունի, քանի որ $-\sqrt{b-1}-4<0$, իսկ առաջինը լուծում կունենա, եթե $\sqrt{b-1}-4\geq 0$. այսպիսով լուծելով

$\begin{cases}b-1\geq 0\\\sqrt{b-1}-4\geq 0\end{cases}$ համակարգը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

բ) $F(x)=f(g(x))$

Լուծում. $F(x)=\sin^2 x+6\sin x+10=(\sin x+3)^2+1$ և պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $(\sin x+3)^2+1=b$ հավասարումը լուծում ունի:
$(\sin x+3)^2=b-1$ նախ պետք է $b-1\geq 0$, այս դեպքում կստացվի

$\left[\begin{array}{l}\sin x+3=\sqrt{b-1}\\\sin x+3=-\sqrt{b-1}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{b-1}-3\\\sin x=-\sqrt{b-1}-3\end{array}\right.$ Այս համախմբի երկրորդ հավասարումը լուծում չունի, որովհետև $-\sqrt{b-1}-3<-1$, իսկ առաջին հավասարումը լուծում ունի, եթե $-1\leq\sqrt{b-1}-3\leq 1$: Ուստի լուծելով

$\begin{cases}b-1\geq 0\\\sqrt{b-1}-3\leq 1\\\sqrt{b-1}-3\geq -1\end{cases}$ համակարգը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

գ) $F(x)=g(g(x))=\sin(\sin x)$

Լուծում. պետք է պարզել, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում sin(sinx)=b հավասարումը լուծում ունի: Նախ պետք է $b\in[-1;1]$, այդ դեպքում կունենանք $\sin x=(-1)^n\arcsin b+\pi n,\ n\in Z$: Պարզ է, որ այս հավասարման աջ մասը $n=\pm 1,\pm 2,\cdots$ դեպքում մոդուլով մեծ է 1-ից, որովհետև $\arcsin b\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ և $\pi-\frac{\pi}{2}>1$: Մնում է քննարկել n=0 դեպքը, այս դեպքում կստացվի`
$\sin x=\arcsin b$ հավասարումը, որը լուծում ունի, եթե` $-1\leq\arcsin b\leq 1$ կամ որ նույնն է` $\sin(-1)\leq b\leq\sin 1$
Պատ` $E(F)=[-\sin 1;\sin 1]$

դ) $F(x)=g(f(x))$

Լուծում. $F(x)=\sin f(x)=\sin(x^2+6x+10)$: Նշ. $x^2+6x+10$=t և նախ գըտնենք t=$x^2+6x+10$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը, այսինքն պարզենք, թե b-ի ինչ արժեքների դեպքում $x^2+6x+10$=b հավասարումը լուծում ունի. դրա համար պետք է $x^2+6x+10$-b=0 քառակուսի հավասարման դիսկրիմինանտը լինի ոչ բացասական՝ $D=36-4(10-b)\geq 0$: Այստեղից՝ $b\in[1;+\infty)$, քանի որ այս միջաքայքը իր մեջ պարունակում է օրինակ $\left[2\pi-\frac{\pi}{2};2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքը, որտեղ sint ֆունկցիան ընդունում է իր բոլոր հնարավոր արժեքները, ապա՝

Պատ՝ $E(F)=[-1;1]$

Ածանցյալի հետ առնչվող պարամետրով խնդիրներ

<u>Օրինակ 1: 10-րդ դաս. N 151բ</u>
Գտնել a և b թվերն այնպես, որ

$$f(3)=2.2,\ \ f'(2)=-1,\ \text{որտեղ}\ \ f(x)=\frac{x^2+3}{a}+\frac{b}{2x-1}$$

<u>Լուծում</u>. $f'(x)=\frac{1}{a}\left(x^2+3\right)'+b\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=\frac{2x}{a}-\frac{2b}{(2x-1)^2}$

Ըստ պայմանի՝ $\begin{cases}\frac{3^2+3}{a}+\frac{b}{2\cdot 3-1}=2.2\\ \frac{2\cdot 2}{a}-\frac{2b}{(2\cdot 2-1)^2}=-1\end{cases}\cdots$ Լուծելով այս համակարգը, կգտնենք a-ն և b-ն

<u>Օրինակ 2: 10-րդ դաս. 191(բ)</u> Գտնել a պարամետրը, եթե հայտնի է, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_1 և x_2 աբսցիս ունեցող կետերում տարված շոշափողները զուգահեռ են:

$$f(x)=3x^2-\frac{a}{x-1},\ \ x_1=2,\ x_2=3$$

<u>Լուծում.</u> $f'(x)=6x+\frac{a}{(x-1)^2}$

$x_1=2$ կետում շոշափողի հավասարումն է՝ $y=f(2)+f'(2)(x-2)$ և քանի որ $f(2)=12-a,\ f'(2)=12+a,$ ապա $y=12-2a+(12+a)(x-2)\ \Rightarrow$
$y=-12-4a+(12+a)x\ \ (1)$

$x_2=3$ կետում շոշափողի հավասարումն է՝ $y=f(3)+f'(3)(x-3)$ և քանի որ $f(3)=27-\frac{a}{2},\ \ f'(3)=18+\frac{a}{4},$ ապա

$$y=27-\frac{a}{2}+\left(18+\frac{a}{4}\right)(x-3)\ \ \Rightarrow\ \ y=-27-\frac{5a}{4}+\left(18+\frac{a}{4}\right)x\ \ (2)$$

Ըստ դպրոցական դասագրքի սահմանման՝ (1) և (2) ուղիղները զուգահեռ են, եթե նրանք չեն համընկնում և ունեն իրար հավասար անկյունային գործակիցներ, այսինքն՝ $\begin{cases}12+a=18+\frac{a}{4}\\ -12-4a\neq -27-\frac{5a}{4}\end{cases}\cdots$

Պատ՝ a=8

Օրինակ 3. 10-րդ դաս. N222(բ) Գտնել a և b թվերն այնպես, որ x_1 և x_2 –ը լինեն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր:

$$f(x)=a\sin 2x+b\cos 3x+\frac{3}{4}tg4x,\ \ x_1=\frac{\pi}{6},\ \ x_2=\frac{\pi}{3}$$

Լուծում. Ըստ կրիտիկական կետի սահմանման` $f'(x_1)=0,\ \ f'(x_2)=0$

$$f'(x)=2a\cos 2x-3b\sin 3x+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4$$

$$\begin{cases}2a\cos 2\frac{\pi}{6}-3b\sin 3\frac{\pi}{6}+3\frac{1}{\cos^2 4\frac{\pi}{6}}=0\\ 2a\cos 2\frac{\pi}{3}-3b\sin 3\frac{\pi}{3}+3\frac{1}{\cos^2 4\frac{\pi}{3}}=0\end{cases}$$

… Լուծելով այս համակարգը, կգտնենք a-ն և b-ն

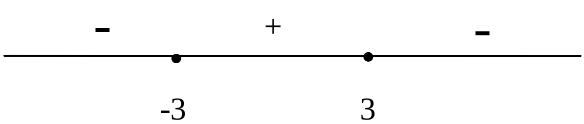
*) Օրինակ 4. 10-րդ դաս, N233(բ)

ա) Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $f(x)=\frac{ax}{x^2+9}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 3 է:

Լուծում. $f'(x)=\frac{(ax)'(x^2+9)-ax(x^2+9)'}{(x^2+9)^2}=\frac{9a-ax^2}{(x^2+9)^2}$

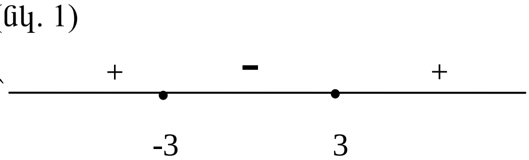
Գտնենք կրիտիկական կետերը` $f'(x)=0$ $\begin{cases}9a-ax^2=0 & (1)\\ (x^2+9)^2\neq 0\end{cases}$

Եթե a=0, ապա $f(x)=0$ x-ի ցանկացած արժեքների համար, ուստի նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 0 է, այսինքն a=0-ն չի բավարարում խնդրի պայմանին: Եթե $a\neq 0$ (1)-ից կստանանք $x=\pm 3$:
Եթե a>0, ապա f'-ի նշանները կլինեն`



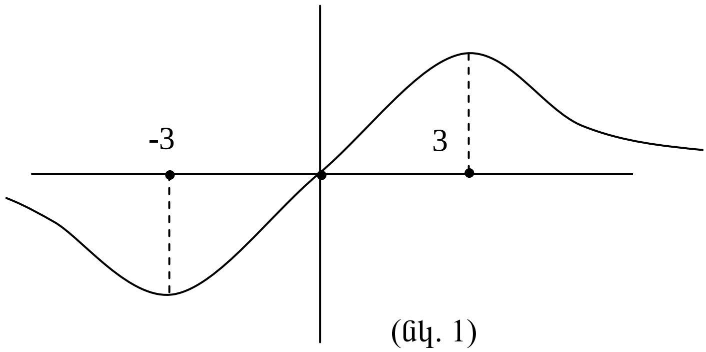
և հաշվի առնելով, որ այս դեպքում f(x)>0, եթե x>0 և f(x)<0, եթե x<0, տեսնում ենք, որ x=3 կետում f(x)-ը ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, իսկ x=-3 կետում` փոքրագույն արժեքը: (նկ. 1)

իսկ a<0 դեպքում f'-ի նշաններն են`



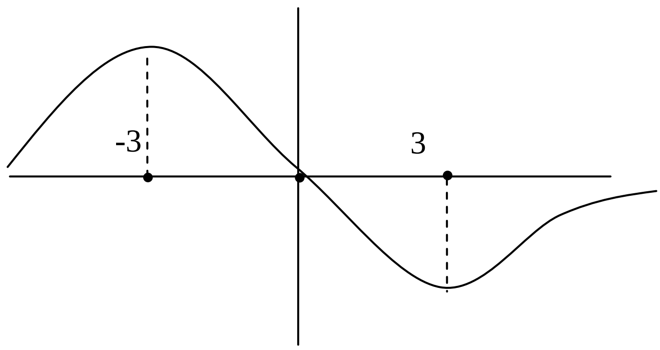
և հաշվի առնելով, որ այս դեպքում $f(x)<0$, եթե $x>0$ և $f(x)>0$, եթե $x<0$, տեսնում ենք, որ $x=3$ կետում $f(x)$-ը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ $x=-3$ կետում՝ մեծագույն արժեքը: (նկ. 2)

$(a>0)$



(նկ. 1)

$(a<0)$



(նկ. 2)

Այսպիսով խնդրի պահանջը նշանակում է՝

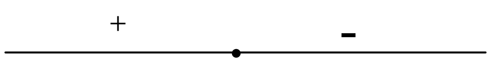
$$\left| f(3)-f(-3) \right| = 3 \quad \left| \frac{3a}{18}+\frac{3a}{18} \right| = 3$$

Պատ՝ $a=\pm 9$

բ) Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $f(x)=ax-x^4$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 48 է:

<u>Լուծում.</u> $f'(x)=a-4x^3$

$$a-4x^3=0,\ x=\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$$



$$\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$$

$$f'(x)\geq 0 \Rightarrow x\leq \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$$

$f'(x) \le 0 \Rightarrow x \ge \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$, այսինքն $x = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$ $f(x)$-ի միակ մաքսիմումի կետն է $(-\infty;+\infty)$-ում, ուստի այդ կետում $f(x)$-ը ընդունում է իր մեծագույն արժեքը: Ըստ խնդրի պայմանի՝

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right) = 48$$

$$a\sqrt[3]{\frac{a}{4}} - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right)^4 = 48$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{4}} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{a^4}{4}} = 48$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{4}} = 64, \quad \frac{a^4}{4} = 4^{9,} \quad a^4 = 2^{20}, \quad a = \pm\sqrt[4]{2^{20}} = \pm 32$$

Պատ՝ $a = \pm 32$