Գծային հավասարումների, հավասարումների և անհավասարումների համակարգերի հետազոտումը

Սահմանում (*) **mx = n** տեսքի հավասարումը, որտեղ m-ը և n-ը տրված ցանկացած թվեր են, կոչվում է <u>գծային հավասարում</u>: Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝

1. եթե m ≠ 0, ապա հավասարումն ունի միակ լուծում՝

$$x = \frac{n}{m}$$

2. եթե m = 0, n ≠ 0 ապա հավասարումը լուծում չունի:

3. եթե m = 0, n = 0 ապա հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ $x \in (-\infty;+\infty)$:

<u>Օրինակ 1</u>. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում նշված հավասարումը ա) լուծում չունի, բ) ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

$(a^2+25)\cdot y = 4 - a^2 + 10ay$ – նախ այս հաավասարումը բերենք (*) տեսքի

$$(a^2+25)\cdot y - 10ay = 4 - a^2$$

$$(a^2+25-10a)y = 4 - a^2$$

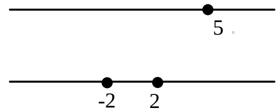
ա) խնդրի լուծումը: Որպեսզի ստացված հավասարումը լուծում չունենա պետք է՝

$$\begin{cases} a^2+25-10a=0 & \dots a=5 \\ 4-a^2 \neq 0 & 4-5^2=-21\neq 0 \end{cases}$$

Պատ.՝ a = 5

բ) խնդրիլուծումը: Որպեսզի ստացված հավասարումն ունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ, պետք է

$$\begin{cases} a^2+25-10a=0 \\ 4-a^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=5 \\ a=\pm 2 \end{cases}$$



ϕ

Պատ՝ ϕ

<u>Օրինակ 2.</u> Տրված է $\begin{cases} (3+m)x+4y=5-3m \\ 2x+(5+m)y=8 \end{cases}$ համակարգը:

Գտնել m-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում՝

ա) համակարգն ունի միակ լուծում

բ) համակարգը լուծում չունի:

Համակարգերի վերաբերյալ նման խնդիրները տեղադրման եղանակով բերվում են գծային հավասարումների մասին նման խնդիրներին, ընդ որում պետք է տեղադրել այն փոփոխականը, որի գործակիցը թիվ է:

$$\begin{cases}(3+m)\cdot\dfrac{8-(5+m)\cdot y}{2}+4y=5\cdot 3m(1)\\ x=\dfrac{8-(5+m)y}{2}\end{cases}$$ ձևափոխենք (1) ը՝

$$8(3+m)-(3+m)(5+m)\cdot y+8y=10-6$$

$$y(8-(3+m)(5+m))=10-6m-24-8m$$

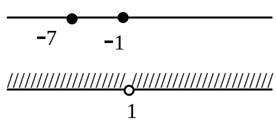
$$\left(m^2+8m+7\right)\cdot y=14+14m$$

ա) խնդրի լուծումը. որպեսզի ստացված հավասարումը (հետևաբար և սկզբնական համակարգը) ունենա միակ լուծում, պետք է՝

$m^2+8m+7\neq 0$ $\quad m\neq -7,\ m\neq -1$ $\quad$ Պատ՝ $m\neq -7,\ m\neq -1$

բ) խնդրի լուծումը. որպեսզի ստացված հավասարումը (հետևաբար և սկզբնական համակարգը) լուծում չունենա, պետք է՝

$$\begin{cases}m^2+8m+7=0\\ 14+14m\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}m=-7, m=-1\\ m\neq -1\end{cases}$$



$\Rightarrow m=-7$

Պատ՝ $m=-7$

Օրինակ 3. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի միակ արմատ: (10-րդ դաս. 366 (բ))

ա) $(a-2)x=\sqrt{9-a^2}$

Լուծում. դրա համար պետք է $\begin{cases}a-2\neq 0\\ 9-a^2\geq 0\end{cases}\cdots$

բ) $|5x-17|=4a^2-10a$ (10-րդ դաս. 367 (բ))

Լուծում. դրա համար պետք է՝ $4a^2-10a=0\cdots$, որովհետև $|ax+b|=c$ հավասարումը, որտեղ $a\neq 0$ ունի 2 լուծում, եթե c>0, 1լուծում, եթե c=0 և լուծում չունի, եթե c<0:

Օրինակ 4. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ երկու տարբեր արմատներ:

ա) $|x^2-1|=a$ (**10**-րդ դաս. 375(բ))

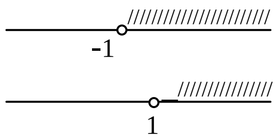
Որպեսզի այս հավասարումը ունենա լուծում պետք է $a \ge 0$:
Առանձին քննարկենք a=0 և a>0 դեպքերը,

<u>եթե a=0</u>, կստանանք $x^2-1=0; x=\pm1$, ստացվեց երկու արմատ, այսինքն a=0-ն բավարարում է խնդրի պայմանին:

<u>եթե a>0</u>, ապա կստանանք $\left[\begin{array}{l}x^2-1=a\\ x^2-1=-a\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2=1+a\\ x^2=1-a\end{array}\right.$

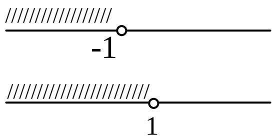
Այս համախումբը կունենա ճիշտ երկու լուծում, եթե

$\begin{cases}1+a>0\\ 1-a<0\end{cases}$



a>1

կամ $\begin{cases}1+a<0\\ 1-a>0\end{cases}$

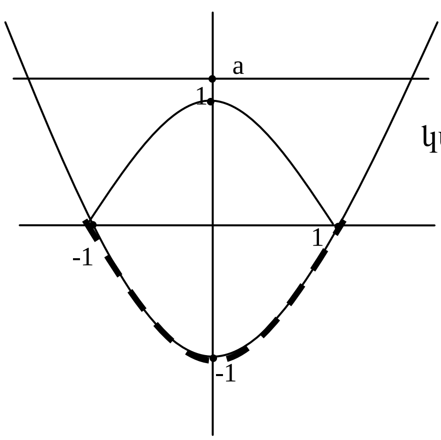


$a<-1;\ a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$,

հաշվի առնելով նաև որ a>0, կստանանք $a\in(1,+\infty)$

Պատ՝ a=0 կամ a>1:

<u>Դիտողություն</u>. Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև գրաֆիկորեն, եթե նշ. $f(x)=\left|x^2-1\right|$, ապա խնդրի պահանջը նշանակում է գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց համար y=a ուղիղը f(x)-ի գրաֆիկը կհատի ճիշտ 2 կետում:



Պարզ է, որ դա տեղի կունենա, եթե a>1 կամ a=0:

բ) $\left||x-5a|-3\right|=2a^2-5a$ (1)

Որպեսզի այս հավասարումը ունենա լուծում, պետք է $2a^2-5a=0$ կամ $2a^2-5a>0$:

Եթե $2a^2-5a=0$, ապա $a(2a-5)=0$ a=0 կամ a=$\frac{5}{2}$:

a=0 դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $\big||x|-3\big|=0 \Rightarrow |x|-3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\pm 3$, այսինքն a=0-ն բավարարում է խնդրի պայմանին:

Եթե a=$\frac{5}{2}$, (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $\left|\left|x-\frac{25}{2}\right|-3\right|=0 \Rightarrow |x-12.5|=3 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x-12.5=3 \\ x-12.5=-3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=15.5 \\ x=9.5 \end{array}\right.$, այսինքն a=$\frac{5}{2}$-ը նույնպես բավարարում է խնդրի պայմանին:

Եթե $2a^2-5a>0$, ապա կստանանք՝ $\left[\begin{array}{l} |x-5a|-3=2a^2-5a \\ |x-5a|-3=-(2a^2-5a) \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} |x-5a|=3+2a^2-5a \\ |x-5a|=3-2a^2+5a \end{array}\right.$$

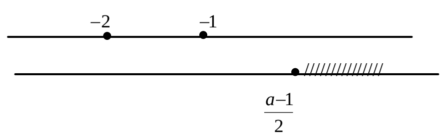
Այս համախումբը կունենա ճիշտ երկու լուծում, եթե $\begin{cases} 3+2a^2-5a>0 \\ 3-2a^2+5a<0 \quad (2) \\ 2a^2-5a>0 \end{cases}$

կամ $\begin{cases} 3+2a^2-5a<0 \\ 3-2a^2+5a>0 \quad \cdots \phi \\ 2a^2-5a>0 \end{cases}$

(2) համակարգի լուծումների բազմությանը ավելացնելով 0 և $\frac{5}{2}$ կետերը, կստանանք վերջնական պատասխանը:

Օրինակ 5. a – ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում չունի: (10-րդ դաս. 401 (ա))

$\begin{cases} x^2+3x+2=0(1) \\ 2x+1\geq a(2) \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-1;\ x_2=-2 \\ x\geq \frac{a-1}{2} \end{cases}$



Լուծենք(1) $x^2+3x+2=0$

$D=9-8=1$

$x=\frac{-3\pm 1}{2}$

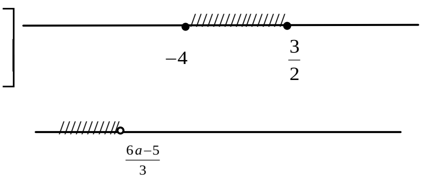
Լուծենք(2) $2x+1\geq a$

$x\geq \frac{a-1}{2}$

Որպեսզի համակարգը լուծում չունենա պետք է՝ $\frac{a-1}{2} \rangle -1 \cdots$

Պատ. $(-1; \ +\infty)$

բ) $\begin{cases}(4+x)(3-2x) \geq 0 \\ 6a-3(x+1) \rangle 2\end{cases}$ $\begin{cases} x \in \left[-4; \ \frac{3}{2}\right] \\ x \langle \frac{6a-5}{3}\end{cases}$

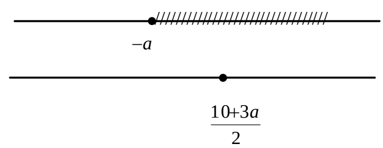


Որպեսզի համակարգը լուծում չունենա պետք է՝ $\frac{6a-5}{3} \leq -4 \cdots$

Պատ $\left(-\infty; \ -\frac{7}{6}\right]$

<u>Օրինակ 6.</u> a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում ունի:

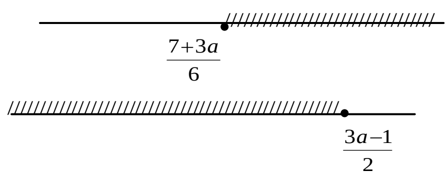
ա) $\begin{cases}x+a \geq 0 \\ 2x-3a = 10\end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -a \\ x = \frac{10+3a}{2}\end{cases}$



Որպեսզի համակարգը լուծում ունենա պետք է՝ $\frac{10+3a}{2} \geq -a \quad \cdots$

Պատ՝.$[-2; +\infty)$

բ) $\begin{cases}6(x-1)-3a \geq 1... \\ 2(x+a)+1 \leq 5a\end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{7+3a}{6} \\ x \leq \frac{3a-1}{2}\end{cases}$

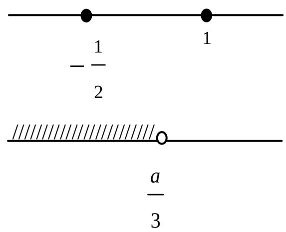


Որպեսզի համակարգը լուծում ունենա պետք է՝ $\frac{7+3a}{6} \leq \frac{3a-1}{2}$...

Պատ. $\left[\frac{5}{3}; \ +\infty\right)$

Օրինակ 7. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը ունի միակ լուծում:

ա) $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0\,(1) \\ 3x - a < 0\,(2) \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1; \quad x = \dfrac{1}{2} \\ x < \dfrac{a}{3} \end{cases}$



Լուծենք (1) Լուծենք (2)

$2x^2 - x - 1 = 0$ $\quad 3x < a$

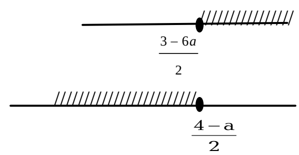
$D = 1 + 8 = 9$ $\quad x < \dfrac{a}{3}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 1$

Որպեսզի համակարգը ունենա միակ լուծում պետք է՝ $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{a}{3} \le 1$ և այլն:

$$\text{Պատ՝ } \left(-\frac{3}{2}; 3\right]$$

բ) $\begin{cases} 4 - 2(3a + x) \le 1 \\ a - 2(1 - x) \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \dfrac{3 - 6a}{2} \\ x \le \dfrac{4 - a}{2} \end{cases}$



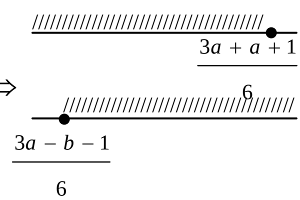
Որպեսզի համակարգը ունենա միակ լուծում, պետք է՝ $\dfrac{3 - 6a}{2} = \dfrac{4 - a}{2}$ և այլն:

$$\text{Պատ՝} -\frac{1}{5}$$

Օրինակ 8. a-ի և b-ի ինչ արժեքների դեպքում՝ $3|2x - a| \le b + 1$ անհավասարման լուծումների բազմությունը [3;4] միջակայքն է: (10-րդ դաս. N394)

Նախ լուծենք անհավասարումը՝

$\begin{cases} 3(2x - a) \le b + 1 \\ 3(2x - a) \ge -b - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 3a \le b + 1 \\ 6x - 3a \ge -b - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \dfrac{3a + b + 1}{6} \\ x \ge \dfrac{3a - b - 1}{6} \end{cases} \Rightarrow$



$$x\in\left[\frac{3a-b-1}{6};\frac{3a+b+1}{6}\right]$$

Որպեսզի անհավասարման լուծումների բազմությունը [3;4] միջակայքը լինի, պետք է՝ $\begin{cases}\dfrac{3a+b+1}{6}=4\\ \dfrac{3a-b-1}{6}=3\end{cases}$ $\cdots$ a=7, b=2

Պատ՝ a=7, b=2

<u>Օրինակ 9.</u> a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում՝ $|3x-2a|\geq 2b-1$ անհավասարման լուծումների բազմությունը $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$-ն է:

Նախ լուծենք անհավասարումը՝ $\left[\begin{array}{l}3x-2a\geq 2b-1\\ 3x-2a\leq 1-2b\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\geq\dfrac{2b-1+2a}{3}\\ x\leq\dfrac{1-2b+2a}{3}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$

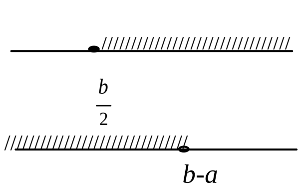
$$x\in\left(-\infty;\frac{1-2b+2a}{3}\right]\cup\left[\frac{2b-1+2a}{3};+\infty\right)$$

Որպեսզի անհավասարման լուծումների բազմությունը լինի տրված բազմությունը, պետք է՝ $\begin{cases}\dfrac{2b-1+2a}{3}=3\\ \dfrac{1-2b+2a}{3}=-1\end{cases}$ $\cdots$ a=1.5, b=3.5

Պատ՝ a=1.5, b=3.5

<u>Օրինակ 10.</u> a-ի և b-ի ո՞ր արժեքների դեպքում անհավասարման լուծումների բազմությունը նշված միջակայքն է՝ $\sqrt{x-a}>\sqrt{2x-b}$; $[1;5)$ (10-րդ դաս N393)

Նախ լուծենք անհավասարումը՝ $\begin{cases}x-a\geq 0 & (1)\\ 2x-b\geq 0 & (2)\\ x-a>2x-b & (3)\end{cases}$, քանի որ (3) և (2) պայմաններից հետևում է (1)-ը, ապա պետք է լուծել հետևյալ անհավասարումների համակարգը՝

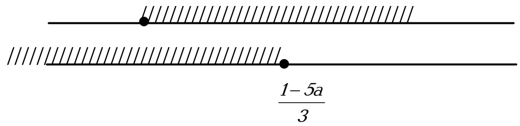
$\begin{cases}2x-b\geq 0\\ x-a>2x-b\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq\dfrac{b}{2}\\ x<b-a\end{cases}$  $\Rightarrow\left[\dfrac{b}{2};b-a\right)$

Ուստի խնդրի պահանջը նշանակում է՝

$$\begin{cases} \frac{b}{2}=1 \\ b-a=5 \end{cases} \quad \ldots$$

<u>Օրինակ 11.</u> a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգի լուծումների բազմությունը 10-ից մեծ երկարությամբ միջակայք է:

$$\begin{cases} 4-x\geq 3-3x \\ 2x+1\geq 5a+5x \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x\leq \frac{1-5a}{3} \end{cases}$$



$$x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1-5a}{3}\right]$$

<u>Նկատի ունենալով , որ [a; b] միջաքայքի երկարություն կոչվում է b-a թիվը</u>, կստանանք՝ $\frac{1-5a}{3}+\frac{1}{2}>10$ և այլն:

Պատ՝ $(-\infty;-5.5)$

<u>Օրինակ 12 (10-րդ դաս. N 399).</u> Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիան որոշված է 10-ից մեծ երկարությամբ միջակայքում՝

$$y=\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{-5a-3x-1}$$

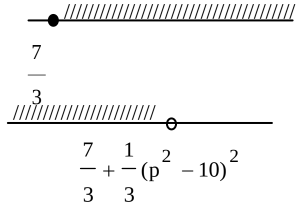
<u>Լուծում.</u> Խնդրի պահանջը նշանակում է, որ $\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ -5a-3x-1\geq 0 \end{cases}$ համակարգի լուծումների բազմությունը 10-ից մեծ երկարությամբ միջակայք է (տես նախորդ օրինակը):

<u>Օրինակ 13.(10-րդ դաս, N391(բ))</u> Գտնել p պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում անհավաս արման լուծումը 2 երկարությամբ միջակայք է:

$$\sqrt{3x-7}<p^2-10$$

<u>Լուծում.</u> Անհավասարությունը լուծում ունի, եթե $p^2-10>0$: Այս պայմանի դեպքում անհավասարությունը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} 3x-7\geq 0 \\ 3x-7<(p^2-10)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq \frac{7}{3} \\ x<\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\left(p^2-10\right)^2 \end{cases}$$



Այսպիսով, պետք է լուծել հետևյալ համակարգը՝ $\begin{cases} p^2 - 10 > 0 \\ \frac{1}{3}\left(p^2 - 10\right)^2 = 2 \end{cases}$ $\cdots$

<u>Օրինակ 14.</u> a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում՝ $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{2a+3}{5-a}$ հավասարման լուծումը դրական թիվ է:

$$x = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2a+3}{5-a}$$

Որպեսզի հավասարման լուծումը դրական լինի, պետք է՝ x>0, այսինքն $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2a+3}{5-a} > 0 \cdots$ և այլն:

$$\text{Պատ՝ } \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$$

<u>Օրինակ 15.</u> a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում՝ $\log_5 x = \frac{a}{1+2a}$ հավասարման լուծումը 1-ից փոքր թիվ է:

$$x = 5^{\frac{a}{1+2a}}$$

Որպեսզի հավասարման լուծումը 1-ից փոքր թիվ լինի, պետք է, որ x<1, $5^{\frac{a}{1+2a}} < 5^0$ և այլն:

$$\text{Պատ՝ } \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$$

<u>Օրինակ 16. (9-րդ դաս. N410)</u> Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան նվազող է ամբողջ թվային առանցքի վրա.

$$f(x) = \left(\sqrt{6a^2 - 5a}\right)^x$$

<u>Լուծում.</u> Ինչպես գիտենք $y = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան աճող է, եթե a>1 և նվազող՝ եթե 0<a<1: Ուստի պետք է տեղի ունենա $0 < \sqrt{6a^2 - 5a} < 1$ պայմանը, $\begin{cases} \sqrt{6a^2 - 5a} > 0 \\ \sqrt{6a^2 - 5a} < 1 \end{cases}$ և այլն:

Օրինակ 17. (9-րդ դաս. N487) Պարզել, թե a-ի որ արժեքների դեպքում է ֆունկցիան աճող և որոնց դեպքում՝ նվազող:

$$f(x)=\log_{a^2-6a+9} x$$

Լուծում. Ինչպես գիտենք $y=\log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիան աճող է, եթե a>1 և նվազող՝ եթե 0<a<1:
Ուստի $f(x)$-ը կլինի աճող, եթե $a^2-6a+9>1 \cdots$ և $f(x)$-ը կլինի նվազող, եթե $\begin{cases} a^2-6a+9>0 \\ a^2-6a+9<1 \end{cases}$ և այլն:

Օրինակ 18. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում՝ $\sin 2x = 5-3a$ հավասարումը լուծում չունի:
Որպեսզի հավասարումը լուծում չունենա պետք է՝ $\left[\begin{array}{l} 5-3a>1 \\ 5-3a<-1 \end{array}\right. \cdots$

$$\text{Պատ՝}\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup(2;+\infty)$$

Օրինակ 19. (9-րդ դաս. N461) Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի արմատ.

ա) $\sin x-\sqrt{3}\cos x = a^2-3a+2$

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\left(a^2-3a+2\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}\left(a^2-3a+2\right)$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2-3a+2\right)$$

Պարզ է, որ այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(a^2 3a+2\right)\le 1 \\ \frac{1}{2}\left(a^2 3a+2\right)\ge -1 \end{cases} \cdots$

և այլն

բ) $6\sin x+8\cos x=a^2-6$

$$\sqrt{6^2+8^2}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}\sin x+\frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}\cos x\right)=a^2-6$$

նշ. $\frac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}=\cos\alpha \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}=\sin\alpha$

$$\cos\alpha\cdot\sin x+\sin\alpha\cdot\cos x=\frac{a^2-6}{10}$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{a^2-6}{10}$$

Պարզ է, որ այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $\begin{cases}\dfrac{a^2-6}{10}\le 1\\ \dfrac{a^2-6}{10}\ge -1\end{cases}$ $\cdots$ և այլն:

<u>Օրինակ 20. (10-րդ դաս. N 365)</u> a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն արմատ ունի:

ա) $\lg\left(10-x^2\right)=\dfrac{a-4}{a-8}$

$10-x^2=10^{\frac{a-4}{a-8}}$; $x^2=10-10^{\frac{a-4}{a-8}}$: Այս հավասարումը լուծում ունի, եթե $10-10^{\frac{a-4}{a-8}}\ge 0\cdots$ և այլն:

բ) $\sqrt{9-x^2}=\dfrac{2a-7}{a-2}\,(1)$

Նախ պետք է $\dfrac{2a-7}{a-2}\ge 0$. այս դեպքում կստանանք $9-x^2=\left(\dfrac{2a-7}{a-2}\right)^2$;

$$x^2=9-\left(\frac{2a-7}{a-2}\right)^2$$

Այսպիսով (1)-ը կունենա լուծում, եթե $\begin{cases}\dfrac{2a-7}{a-2}\ge 0\\ 9-\left(\dfrac{2a-7}{a-2}\right)^2\ge 0\end{cases}$ $\cdots$ և այլն:

գ) $6^{1-x^2}=a^2+a$

Եթե $a^2+a>0$, ապա $1-x^2=\log_6\left(a^2+a\right)$; $x^2=1-\log_6\left(a^2+a\right)$

Այսպիսով, պետք է տեղի ունենա $\begin{cases}a^2+a>0\\ 1-\log_6\left(a^2+a\right)\ge 0\end{cases}$ $\cdots$ և այլն: