ԵՐԵՎԱՆԻ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՔՈԼԵՋ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄՈԴՈՒԼ 1
ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Կազմեց Վ.Օհանջանյանը

ԵՐԵՎԱՆ – 2010

ԱՐԴՅՈՒՆՔ 1

Վեկտորական հանրահաշիվ և կոմպլեքս թվեր

§1. Տեսական հարցեր

1. Վեկտորի սահմանումը, երկարությունը և ուղղությունը: Վեկտորների հավասարությունը:
2. Գծային գործողություններ վեկտորների հետ՝ վեկտորների գումարը, տարբերությունը և վեկտորի ու թվի արտադրյալը:
3. Համագիծ վեկտորներ: Համագիծության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:
4. Վեկտորների գծորեն կախվածությունը և անկախությունը:
5. Ապացուցել, որ հարթության մեջ երեք վեկտորներ գծորեն կախված են: Հարթության և տարածության չափերը:
6. Ապացուցել, որ եռանկյան միջնագծերը, եթե ընդունենք վեկտորներ, ապա նրանցով կարելի է կառուցել եռանկյուն:
7. Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ: Վեկտորի կոորդինատները այդ համակարգում:
8. Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ:
9. Եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատների հաշվումը:
10. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը և նրա հատկությունները:
11. Վեկտորների սկալյար արտադրյալի հաշվումը ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգում:
12. Վեկտորի երկարության և երկու վեկտորների միջև կազմած անկյան որոշումը ուղղանկյուն համակարգում:
13. Վեկտորի միավոր վեկտոր և ուղղորդ կոսինուսներ:
14. Վեկտորի պրոյեկցիան տրված ուղղության վրա, նրա հաշվումը:
15. Կոսինուսների թեորեմը:
16. Վեկտորների վեկտորական արտադրյալը և նրա հատկությունները:
17. Վեկտորական արտադրյալի հաշվումը ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում:
18. Երրորդ կարգի որոշիչների հաշվումը:
19. Եռանկյան և զուգահեռագծի մակերեսների հաշվումը:
20. Վեկտորների խառը արտադրյալը և նրա հատկությունները:

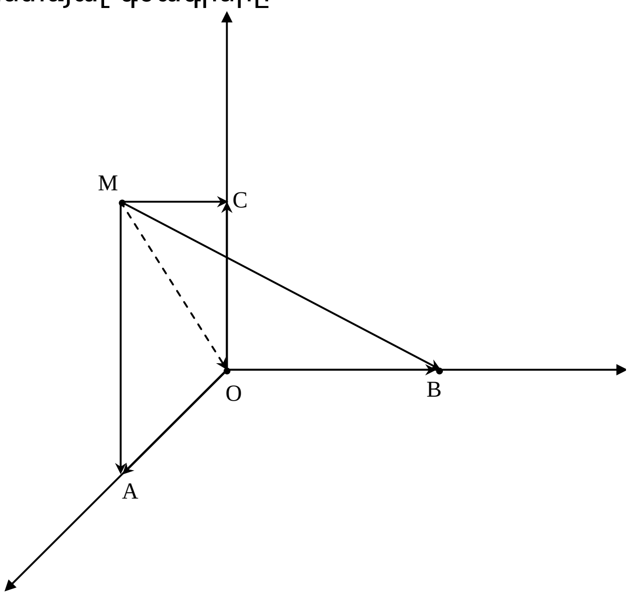
21. Վեկտորների խառը արտադրյալի հաշվումը ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում:
22. Բուրգի ծավալի հաշվումը:
23. Վեկտորների աջ և ձախ եռյակներ:
24. Կոմպլեքս թիվ: Կոմպլեքս թվերի գումարը և տարբերությունը:
25. Կոմպլեքս թվերի արտադրյալը:
26. Կոմպլեքս թվերի քանորդը:
27. Կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը, մոդուլը և արգումենտը:
28. Եռանկյունաչափական տեսքով տրված կոմպլեքս թվերի արտադրյալը:
29. Մուավրի բանաձևը:
30. Եռանկյունաչափական տեսքով տրված կոմպլեքս թվերի քանորդը:
31. Կոմպլեքս թվից արմատ հանելը:

§2. Տիպային խնդիրների լուծում

1. Երեք փոխադարձաբար ուղղահայաց ուղիղներ հատվում են O կետում: Մի որևէ M կետից տարված են այդ ուղիղներին ուղղահայաց MA, MB, MC ուղիղները: Ապացուցել, որ

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$$

Լուծում: Դիտարկենք հետևյալ գծագրերը՝

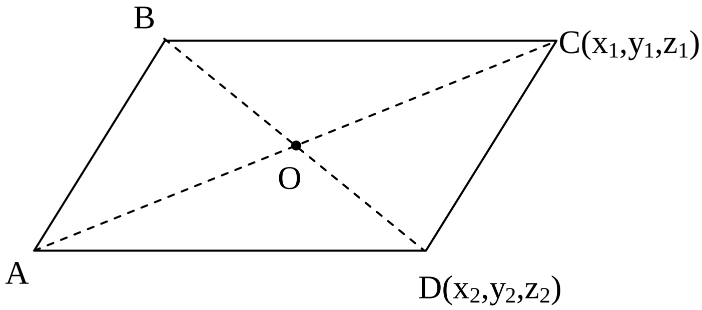


Գծագրից ունենք $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$ և $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$: Գումարելով միմյանց ստացված հավասարությունները, կստանանք՝

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{3MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{3MO}+\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MO}:$$

2. Տրված են ABCD զուգահեռագծի A(-2, -3, 7) և B(2, 5, -6) գագաթները և անկյունագծերի հատման O(-4, 2, 3) կետը: Որոշել զեւգահեռագծի մյուս գագաթների կոորդինատները:

Լուծում: Դիտարկենք հետևյալ գծագիրը՝



Քանի որ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատման O կետում կիսվում են, ապա $\lambda = BO:OD=1$ և $AO:OC=1$: Հետևաբար

$$-4=\frac{2+x_2}{2},\ \ 2=\frac{5+y_2}{2},\ 3=\frac{-6+z_2}{2}\Rightarrow x_2=-10,\ \ y_2=-1,\ z_2=12$$

$$-4=\frac{-2+x_1}{2},\ \ 2=\frac{-3+y_1}{2},\ 3=\frac{7+z_1}{2}\Rightarrow x_1=-6,\ \ y_1=7,\ z_1=-1:$$

3. Տրված են $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ և $|\vec{a}+\vec{b}|=24$: Հաշվել $|\vec{a}-\vec{b}|$:

Լուծում: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})$: Օգտվելով սկալյար արտադրյալի բաշխական և տեղափոխական հատկություններից, կստանանք՝

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi:$$

Հետևաբար՝ $24^2=13^2+19^2+2\cdot13\cdot19\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{24^2-13^2-19^2}{2\cdot19\cdot13}=\dfrac{46}{2\cdot19\cdot13}=\dfrac{23}{19\cdot13}$:

Քանի որ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$,

ապա $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=13^2+19^2-2\cdot13\cdot19\cdot\dfrac{23}{13\cdot19}=484\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=22$:

4. Եռանկյան գագաթներն են A(2, -1, 1), B(-3, 2, 1) և C(3,0,-2) : Որոշել եռանկյան $<A$ և $<B$ անկյունները:

Լուծում: $\overrightarrow{AB}=\{-5,3,0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1,1,-3\}$ և $\overrightarrow{BC}=\{6,-2,-3\}$:

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-5\cdot1+3\cdot1+0\cdot(-3)=-8$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+9+0}=\sqrt{34}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$:

Մյուս կողմից՝ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\varphi$: Այստեղից

$\cos(<A)=\cos(\overrightarrow{AB},\hat{\ }\overrightarrow{AC})=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-8}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{11}}=\dfrac{-8}{\sqrt{374}}$: Հետևաբար

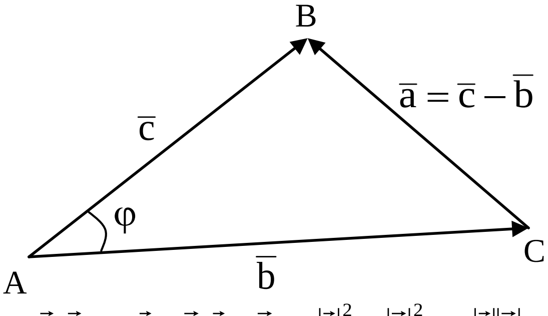
$<A=\pi-\arccos\dfrac{8}{\sqrt{374}}$:

Նույն ձևով

$$\cos(<B)=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{5\cdot6+(-3)\cdot(-2)+0\cdot(-3)}{\sqrt{25+9+0}\cdot\sqrt{36+4+9}}=\frac{36}{\sqrt{24}\cdot7}=\frac{18}{7\sqrt{6}}\Rightarrow <B=\arccos\frac{18}{7\cdot\sqrt{6}}:$$

5. Պարզել, թե ինչպիսի եռանկյուն է հետևյալ եռանկյունը, որի գագաթներն են $A(1,-3,2)$, $B(-2,4,5)$ և $C(2,1,4)$ կետերը:

Լուծում: Դիտարկենք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորներով կազմված եռանկյունը՝



$$\left|\vec{a}\right|^2=(\vec{a},\vec{a})=(\vec{c}-\vec{b},\vec{c}-\vec{b})=\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi:$$

Եթե φ-ն սուրանկյուն է, ապա $\left|\vec{a}\right|^2<\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2$, իսկ եթե φ-ն բութանկյուն է, ապա $\cos\varphi<0$ և $\left|\vec{a}\right|^2>\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$-ի դեպքում ունենք $\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2$: Հետևաբար, եթե եռանկյան բոլոր կողմերի համար մի կողմի երկարության քառակուսին փոքր է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարից, ապա եռանկյունը սուրանկյուն է, իսկ եթե որևէ կողմի երկարության քառակուսին մեծ է մյուս կողմերի երկարությունների քառակուսիների գումարից, ապա եռանկյունը բութանկյուն է և $\varphi=\frac{\pi}{2}$ դեպքում եռանկյունը ուղղանկյունէ:

Այժմ վերադառնանք մեր խնդրի լուծմանը: Ունենք որ, $\overrightarrow{AB}=\{-3,7,3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1,4,2\}$, $\overrightarrow{BC}=\{4,-3,-1\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=9+49+9=67$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=1+16+4=21$ և $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=16+9+1=26$:

Քանի որ $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2>\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$, ապա եռանկյունը բութանկյուն է:

6. Որոշել $\vec{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{15}$, այն համագիծ է $\vec{a}=\{-1,2,-5\}$ վեկտորին ու կազմում է OY առանցքի հետ բութ անկյուն:

Լուծում: Ենթադրենք $\vec{x}=\{x_1,y_1,z_1\}$: Քանի որ $\vec{x}$–ը համագիծ է $\vec{a}$ վեկտորին, ապա $\vec{x}=\lambda\vec{a}$: Այստեղից $x_1=-\lambda$, $y_1=2\lambda$, $z_1=-5\lambda$: Հետևաբար $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{15}$ պայմանից կհետևի, որ $\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+25\lambda^2}=\sqrt{15}\Rightarrow|\lambda|\cdot\sqrt{30}=\sqrt{15}\Rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: Քանի որ $\vec{x}$ վեկտորը OY առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն, ապա y_1 կոորդինատը պետք է լինի բացասական: Ուրեմն $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$: Հետևաբար $\vec{x}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2},\frac{5}{\sqrt{2}}\right\}$:

7. Որոշել $\vec{s}=\{\sqrt{2},-4,-7\}$ վեկտորի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որը OX և OY առանցքների հետ կազմում է $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, իսկ OZ առանցքի հետ γ բութ անկյունը:

Լուծում: Քանի որ Պր$_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\left|\vec{b}\right|}=(\vec{a},\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|})=(\vec{a},\overrightarrow{b^0})$, ապա $\vec{s}$ վեկտորի պրոյեկցիան տրված առանցքի վրա գտնելու համար պետք է $\vec{s}$ վեկտորը սկալյարապես բազմապատկել l առանցքի ուղղության $\overrightarrow{l^0}$ միավոր վեկտորով: Հայտնի է, որ $\overrightarrow{l^0}$ միավոր վեկտորի կոորդինատները հանդիսանում են այդ առանցքի և OX, OY ու OZ առանցքների հետ կազմած անկյունների կոսինուսները: Հետևաբար $\overrightarrow{l^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$: Քանի որ $\left|\overrightarrow{l^0}\right|^2=1$, ապա $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos^2\gamma=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$:

Ըստ պայմանի տրված առանցքը OZ առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն, հետևաբար $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$: Ուրեմն

Պր$_l\,\vec{s}=(\vec{s},\overrightarrow{l^0})=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+(-4)\cdot\frac{1}{2}+(-7)\cdot(-\frac{1}{2})=1-2+\frac{7}{2}=\frac{5}{2}$:

8. Տրված են $A(-1,2,-3)$, $B(2,1,-4)$ և $C(1,-3,5)$ կետերը: Որոշել 1) $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})^0$,
2) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AB}$,
3) $S_{\Delta ABC}$:

Լուծում: Որոշենք $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորների կոորդինատները $\overrightarrow{AB}=\{3,-1,-1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,-5,8\}$, $\overrightarrow{BC}=\{-1,-4,9\}$: Հաշվենք $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ վեկտորական արտադրյալը

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & -1\\ -1 & -4 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -4 & 9\end{vmatrix}\cdot\hat{i}-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 9\end{vmatrix}\cdot\hat{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\cdot\hat{k}=-13\hat{i}-26\hat{j}-13\hat{k}:$$

Հետևաբար $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{13^2+26^2+13^2}=\sqrt{13^2(1+4+1)}=13\sqrt{6}$:

Քանի որ $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, ապա $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})^0=\dfrac{(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{-13\hat{i}-26\hat{j}-13\hat{k}}{13\sqrt{6}}=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}=-\hat{i}-4\hat{j}+9\hat{k}-2(2\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k})=-5\hat{i}+6\hat{j}-7\hat{k}$

հետևաբար

$$(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -5 & 6 & -7\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -7\\ -1 & -1\end{vmatrix}\cdot\hat{i}-\begin{vmatrix}-5 & -7\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\hat{j}+\begin{vmatrix}-5 & 6\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\hat{k}$$

$$=-13\hat{i}-26\hat{j}-13\hat{k}=\{-13,-26,-13\}:$$

Քանի որ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\left|-\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=S_{\Delta ABC}$, ապա $S_{\Delta ABC}=\dfrac{13\sqrt{6}}{2}$:

9. Որոշել $\vec{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ նա ուղղահայաց է $\vec{a}=\{4,-2,-3\}$ և $\vec{b}=\{0,1,3\}$ վեկտորներին, կազմում է OZ առանցքի հետ բութ անկյուն և $|\vec{x}|=26$:

Լուծում: Քանի որ $\vec{x}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին, ապա այն համագիծ է $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորական արտադրյալին, այսինքն $\vec{x}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$: Հաշվենք $\vec{a}\times\vec{b}$ -ն:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\cdot\hat{i}-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}\cdot\hat{j}+\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\hat{k}=-3\hat{i}-12\hat{j}+4\hat{k},$$

$\vec{x}=\{x_1,y_1,z_1\}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=-3\lambda\hat{i}-12\lambda\hat{j}+4\lambda\hat{k}$, հետևաբար $x_1=-3\lambda, y_1=-12\lambda, z_1=4\lambda$:

Ըստ $|\vec{x}|=26$ պայմանի $\sqrt{9\lambda^2+144\lambda^2+16\lambda^2}=26\Rightarrow 13|\lambda|=26\Rightarrow\lambda=\pm 2$:

Քանի որ $\vec{x}$ վեկտորը OZ առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն, ապա նրա պրոյեկցիան OZ առանցքի վրա պետք է լինի բացասական, ուրեմն $\lambda=-2$: Հետևաբար $\vec{x}=6\hat{i}+24\hat{j}-8\hat{k}$:

10. Տրված են $A(-1,2,3)$, $B(2,1,-4)$, $C(3,1,5)$ և $D(-4,1,-3)$ կետերը: Որոշել 1) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AD})$; 2) Պր$_{\overrightarrow{AD}}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$; 3) V_{ABCD}; 4) $\overrightarrow{AC}$–ի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որը OYառանցքի հետ կազմում է 60°, OZ առանցքի հետ 45° անկյունները, իսկ OX առանցքի հետ սուր անկյուն; 5) որոշել $(\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC})^0$ վեկտերի ուղղորդ կոսինուսները; 6) $S_{\Delta ACD}$

Լուծում: Որոշենք $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ վեկտորների կոորդինատները՝

$$\overrightarrow{AB}=\{3,-1,-7\},\overrightarrow{BA}=\{-3,1,7\},\overrightarrow{AC}=\{4,-1,2\},\ \overrightarrow{AD}=\{-3,-1,-6\},\ \overrightarrow{BC}=\{1,0,9\}:$$

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=6\hat{i}-2\hat{j}-14\hat{k}-4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}=2\hat{i}-\hat{j}-16\hat{k}=\{2,-1,-16\};$$

$$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\hat{i}+9\hat{k}+3\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k}=4\hat{i}+\hat{j}+15\hat{k}=\{4,1,15\}:$$

1)

$$(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -1 & -16\\ 4 & 1 & 15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -16\\ 1 & 15\end{vmatrix}\cdot\hat{i}-\begin{vmatrix}2 & -16\\ 4 & 15\end{vmatrix}\cdot\hat{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\cdot\hat{k}$$

$$=\hat{i}-94\hat{j}+6\hat{k}=\{1,-94,6\}:$$

2) $2\overrightarrow{AC}=\{8,-2,4\}, \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=3\hat{i}-\hat{j}-7\hat{k}-8\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}=-5\hat{i}+\hat{j}-11\hat{k}=\{-5,1,-11\}$

Հետևաբար $\text{Պր}_{\overrightarrow{AD}}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})=\dfrac{(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\dfrac{(-5)\cdot(-3)+1\cdot(-1)+(-11)\cdot(-6)}{\sqrt{46}}=\dfrac{80}{\sqrt{46}}:$

3) $V_{ABCD}=\pm\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}):$ Եթե $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորները կազմում են աջ եռյակ, ապա կվերցնենք “+” նշանը, իսկ եթե կազմում են ձախ եռյակ, ապա կվերցնենք “-” նշանը: Երեք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները կազմում են աջ եռյակ, եթե նրանց խառը արտադրյալը՝ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$, հակառակ դեպքում կազմում են ձախ եռյակ, իսկ եթե $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, ապա վեկտորները գտնվում են մի հարթության մեջ:

Կազմենք $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորների խառը արտադրյալը:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}3 & -1 & -7\\ 4 & -1 & 2\\ -3 & -1 & -6\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & -6\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & -6\end{vmatrix}+(-7)\begin{vmatrix}4 & -1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=3(6+2)+(-24+6)-7(-4-3)=24-24+6+49=55$$

Հետևաբար $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\cdot 55=9\dfrac{1}{6}:$ Երրորդ կարգի որոշիչի հաշվման համար օգտագործեցինք հետևյալ օրենքը՝

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}:$$

4) $\text{Պր}_l\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AC},\vec{l}^0):$ l առանցքի ուղղությամբ միավոր վեկտորը ունի հետևյալ կոորդինատները՝ $\vec{l^0}=\{\cos\alpha,\cos 60^\circ,\cos 45^\circ\}:$ Քանի որ $\left|\vec{l^0}\right|^2=1$, ապա

$\cos^2\alpha+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1\Rightarrow\ \Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{2}:$ Ըստ պայմանի l առանցքը OX–ի հետ կազմում է սուր անկյուն, հետևաբար $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$: Այսպիսով՝

$$\text{Պր}_l\overrightarrow{AC}=(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k},\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k})=4\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\frac{1}{2}+\sqrt{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}:$$

5) $\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}=-3\hat{i}+\hat{j}+7\hat{k}-8\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}=\{-11,3,3\}:$

Քանի որ $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, ապա $(\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC})^0=\dfrac{-11\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{121+9+9}}=\dfrac{-11}{\sqrt{139}}\hat{i}+\dfrac{3}{\sqrt{139}}\hat{j}+\dfrac{3}{\sqrt{139}}\hat{k}:$

Հետևաբար՝ $\cos\alpha=\dfrac{-11}{\sqrt{139}},\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{139}},\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{139}}$:

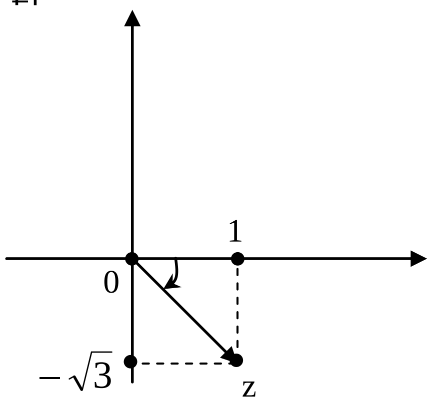
6) $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|$: Հաշվենք $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը՝

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}\cdot\hat{i} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}\cdot\hat{j} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\cdot\hat{k} = 8\hat{i} + 18\hat{j} - 7\hat{k}:$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{64+324+49} = \frac{\sqrt{437}}{2}:$$

11. Հաշվել 1) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, 2) $(i+2)^3$, 3) $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$, 4) i^{2785}, 5) $(1+i\sqrt{3})^6$:

Լուծում: 1) $z = 1-i\sqrt{3}$ թիվը պատկերենք հարթության վրա ու բերենք այն եռանկյունաչափական տեսքի՝



$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2;\ \ tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

հետևաբար $z = 1-i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$:

$$\sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), k = 0,1:$$

Այստեղից, $z_0 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$;

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right) = \sqrt{2}(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}:$$

2) $z = (i+2)^3 = i^3 + 6i^2 + 12i + 8 = -i - 6 + 12i + 8 = 11i + 2$;

3) $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1-i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3})^2 - i^2} = \frac{\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}-i^2}{3+1} = \frac{\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} - i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$;

4) $i^{2785} = (i^4)^{696}\cdot i = i$, քանի որ $i^4 = 1$;

5) $(1+i\sqrt{3})^6 = \left[\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right]^6 = 2^6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^6 = 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64$,

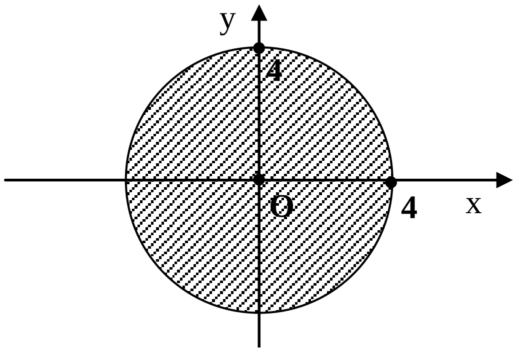
օգտվեցինք Մուավրի բանաձևից՝

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi:$$

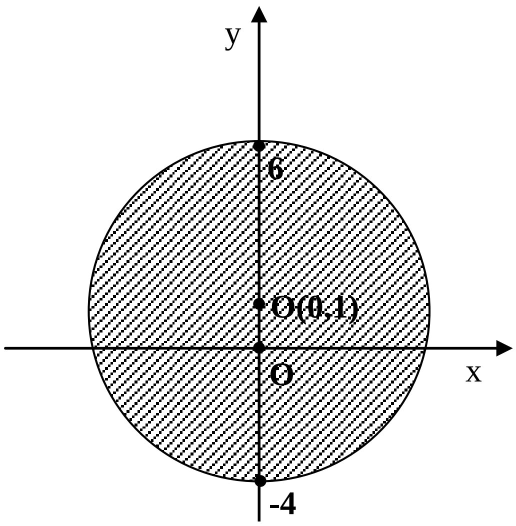
12. Հարթության վրա որոշել որտե՞ղ են տեղաբաշխված z կոմպլեքս թվերը, որոնց համար՝

1) $|z|\le 4$; 2) $|z-i|\le 5$; 3) $\left|z-\frac{2}{i}\right|=1$; 4) $|z-3|\le 3$; 5) $|z-3i|>4$; 6) $|z-i+2|<4$:

Լուծում: 1) $|z|\le 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\le 4 \Rightarrow x^2+y^2\le 16$: Սա կլինի $R=4$ շառավղով շրջանի բոլոր կետերը, որի կենտրոնն է $(0,0)$ կետը (ներառյալ շրջանագծի կետերը):



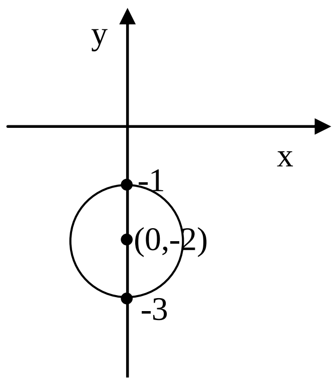
2) $|z-i|\le 5 \Rightarrow |x+iy-i|\le 5 \Rightarrow |x+(y-1)i|\le 5 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}\le 5 \Rightarrow x^2+(y-1)^2\le 25$: Սա կլինի $R=5$ շառավղով շրջանի բոլոր կետերը, որի կենտրոնն է $(0,1)$ կետը:



3) $\left|z-\frac{2}{i}\right|=1 \Rightarrow \left|x+iy-\frac{2i}{i^2}\right|=1 \Rightarrow |x+iy+2i|=1 \Rightarrow |x+(y+2)i|=1$

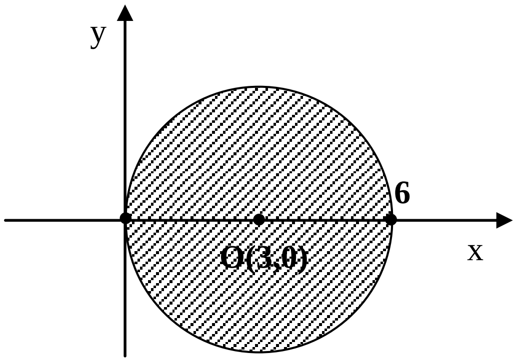
$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}=1 \Rightarrow x^2+(y+2)^2=1$:

Սա իրենից ներկայացնում է $(0,-2)$ կենտրոնով և $R=1$ շառավղով շրջանագծի կետերը:



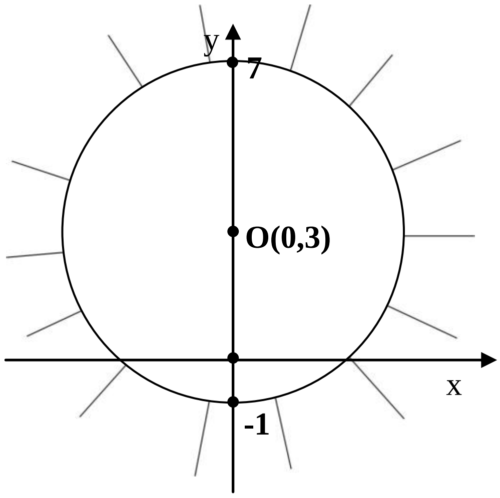
4) $|z-3|\le 3 \Rightarrow |x+iy-3|\le 3 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}\le 3 \Rightarrow (x-3)^2+y^2\le 9$:

Սա $(3,0)$ կենտրոնով և $R=3$ շառավղով շրջանի կետերն են ներառյալ շրջանագծի կետերը:



5) $|z-3i|>4 \Rightarrow |x+iy-3i|>4 \Rightarrow |x+(y-3)i|>4 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}>4 \Rightarrow x^2+(y-3)^2>16$:

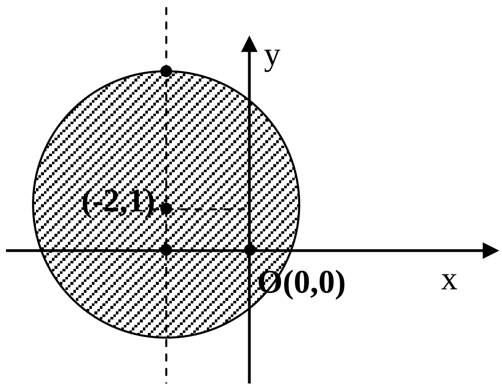
Սա իրենից ներկայացնում է $(0,3)$ կենտրոնով և $R=4$ շառավղով շրջանից դուրս գտնվող կետերի բազմությունը:



6) $|z-i+2|<4 \Rightarrow |x+iy-i+2|<4 \Rightarrow |(x+2)+i(y-1)|<4$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}<4 \Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2<16:$$

Սա $O(-2,1)$ կենտրոնով ու $R=4$ շառավղով շրջանի ներքին կետերն են, չհաշված շրջանագծի կետերը:



§3. Խնդիրներ

1. Շրջանագիծը A, B և C կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի և նրա O կենտրոնը միացված է A, B, C կետերի հետ: Ապացուցել, որ $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$:
2. Շրջանագիծը $A_1, A_2, ..., A_n$ կետերով բաժանված է n հավասար մասերի և նրա O կենտրոնը միացված է $A_1, A_2, ..., A_n$ կետերի հետ: Ապացուցել, որ $\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\cdots+\overline{OA_n}=0$:
3. Ապացուցել, որ սեղանի կողերի միջնակետերը միացնող ուղղի հատվածը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին և հավասար է նրանց կիսագումարին:
4. Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր եռանկյան երկու կողմերի M և N միջնակետերը միացնող ուղիղը զուգահեռ է երրորդ կողմին և MN հատվածի երկարությունը հավասար է երրորդ կողմի երկարության կեսին:
5. Դիցուք M-ը ABC եռանկյան հարթության վրա վերցրած կետ է: D, E, F կետերը ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{MD}+\overline{ME}+\overline{MF}$:
6. Ցույց տալ, որ $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OM}$, որտեղ M-ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է, իսկ O-ն կամայական կետ է:
7. Տրված է ABCDEF կանոնավոր վեցանկյունը, որտեղ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$: Այդ վեկտորների ուղղությամբ վերլուծել $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AF}, \overline{BC}$ և $\overline{EF}$ վեկտորները:
8. Որոշել A(2,-1,4), B(3,2,-6) և C(-5,0,2) գագաթներով եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատները և A գագաթից տարված միջնագծի երկարությունը:
9. Տրված են ABCD զուգահեռագծի A(2,-3,-5) և B(-1,3,2) գագաթները և անկյունագծերի հատման E(4,-1,7) կետը: Որոշել զուգահեռագծի մյուս գագաթների կոորդինատները:
10. Տրված են ABCD զուգահեռագծի A(3,-1,2), B(1,2,-4) և C(-1,1,2) գագաթները: Որոշել D գագաթի կոորդինատները:
11. Հատվածը սահմանափակված է A(-1,8,3) և B(9,-7,-2) կետերով և C, D, E և F կետերով բաժանված է 5 հավասար մասերի: Որոշել այդ կետերի կոորդինատները:
12. Որոշել AB հատվածի ծայրակետերի կոորդինատները, եթե այն C(2,0,2) և D(5,-2,0) կետերի միջոցով բաժանված է երեք հավասար մասերի:
13. Տրված են եռանկյան A(1,2,-1), B(2,-1,3) և C(-4,7,5) գագաթները: Որոշել B գագաթից տարված ներքին անկյան կիսորդի երկարությունը:
14. Տրված են՝ $|\bar{a}|=11, |\bar{b}|=23$ և $|\bar{a}-\bar{b}|=30$: Հաշվել $|\bar{a}+\bar{b}|$:
15. Երկու $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորներ փոխուղղահայաց են: Հաշվել $|\bar{a}+\bar{b}|$ և $|\bar{a}-\bar{b}|$, եթե $|\bar{a}|=5, |\bar{b}|=12$:
16. Տրված են ABC եռանկյան կողմերի երկարությունները՝ AB=7, BC=5, CA=6: Գտնել $\overline{BA}$ և $\overline{BC}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:
17. Տրված են A(1,-9,5), B(4,-14,13) և C(0,-8,1) կետերը: Որոշել $\overline{AB}$ և $\overline{AC}$ վեկտորների գումարի ու տարբերության մոդուլները:
18. Ենթադրենք $\bar{a}$, $\bar{b}$ և $\bar{c}$ վեկտորները բավարարում են $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ պայմանին: Հաշվել $(\bar{a},\bar{b})+(\bar{a},\bar{c})+(\bar{b},\bar{c})$, եթե $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=1$ և $|\bar{c}|=4$:
19. Հետևյալ երեք վեկտորները՝ $\bar{a}$, $\bar{b}$ և $\bar{c}$, կազմում են միմյանց հետ 60° անկյուն: Իմանալով, $|\bar{a}|=4, |\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=6$, հաշվել $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ վեկտորի մոդուլը:
20. Տրված է $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=5$: α-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ և $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց:

21. Տրված են A(-1,3,-7), B(2,-1,5) և C(0,1,-5) կետերը: Յաշվել 1) $\left(2\overline{AB}-\overline{CB},2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)\cdot\overline{BC}$ վեկտորի կոորդինատները:

22. Տրված են քառանկյան գագաթները՝ A(1,-3,2), B(1,4,0), C(-4,1,1) և D(-5,-5,3): Ապացուցել, որ AC և BD անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

23. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(1,-3,2), B(2,-1,4), C(-2,0,5): Որոշել եռանկյան $\angle A$ և $\angle B$ անկյունները:

24. Տրված են $\bar{a}=-2\hat{i}+3\hat{j}+\beta\hat{k}$ և $\bar{b}=\alpha\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ վեկտորները: Ի՞նչ արժեքներ պետք է ունենան α-ն և β-ն, որպեսզի $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ:

25. Յամոզվել, որ A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3), D(3,-5,3) կետերը հանդիսանում են սեղանի գագաթներ:

26. Որոշել $\bar{a}=\{6,-2,-3\}$ վեկտորի միավոր վեկտորը:

27. Տրված են $\vec{a}=\{-1,2,-4\}$ և $\vec{b}=\{3,-1,-5\}$ վեկտորները: Որոշել $\vec{a}-2\vec{b}$ և $3\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորների ուղղորդ կոսինուսները:

28. Տրված են $\bar{a}=-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\bar{b}=\hat{i}+5\hat{j}$ և $\bar{c}=4\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ վեկտորները: Հաշվել 1) $\left(\bar{a}+\bar{c}\right)^{\circ}$, 2) $\bar{a}$ և $\bar{c}$ վեկտորներով կազմված անկյունը, 3) Պր$_{\bar{c}}^{\left(3\bar{a}-2\bar{b}\right)}$:

29. Տրված են A(-2,3,-4), B(3,2,5), C(1,-1,2) և D(3,2,-4) կետերը: Որոշել 1) $\angle ACD$, 2) Պր$_{\overline{CD}}^{\overline{AB}}$, 3) D կետի համաչափ կետը A կետի նկատմամբ:

30. Տրված են $\bar{a}=\{3,-6,-1\}$, $\bar{b}=\{1,4,-5\}$ և $\bar{c}=\{3,-4,12\}$ վեկտորները: Գտնել ՊՐ$_{\bar{b}-\bar{a}}\,\bar{a}+2\bar{b}$:

31. Տրված են A(3,-4,-2) և B(2,5,-2) կետերը: Որոշել $\overline{AB}$ վեկտորի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որը կազմում է Ox և Oy առանցքների հետ $\alpha=60^{\circ},\beta=120^{\circ}$, իսկ Oz առանցքի հետ γ բութ անկյունը:

32. Որոշել $\bar{S}=\{\sqrt{2},-3,-5\}$ վեկտորի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որը Ox և Oz առանցքների հետ կազմում է $\alpha=45^{\circ},\gamma=60^{\circ}$, իսկ Oy առանցքի հետ β սուր անկյունը:

33. Տրված են $\bar{a}=\{3,-1,5\}$ և $\bar{b}=\{1,2,-3\}$ վեկտորները: Որոշել $\bar{x}$ վեկտորը, եթե այն ուղղահայաց է Oz առանցքին և բավարարում է $\left(\bar{x},\bar{a}\right)=9$ և $\left(\bar{x},\bar{b}\right)=-4$ պայմաններին:

34. Գտնել $\bar{x}$ վեկտորը, եթե այն ուղղահայաց է $\bar{a}=\{2,3,-1\}$ և $\bar{b}=\{1,-2,3\}$ վեկտորներին և բավարարում է $\left(\bar{x},2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)=-6$ պայմանին:

35. Ենթադրենք $\bar{x}$ վեկտորը համագիծ է $\bar{a}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ վեկտորին և բավարարում է $\left(\bar{x},\bar{a}\right)=3$ պայմանին: Որոշել $\bar{x}$ վեկտորի կոորդինատները:

36. Որոշել $\bar{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ուղղահայաց է $\bar{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ և $\bar{b}=18\hat{i}-22\hat{j}-5\hat{k}$ վեկտորներին, կազմում է Oy առանցքի հետ բութ անկյուն և $\left|\bar{x}\right|=14$:

37. Որոշել $\bar{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $\left|\bar{x}\right|=50$, այն համագիծ է $\bar{a}=\{6;-8;-7,5\}$ վեկտորին ու կազմում Oz առանցքի հետ սուր անկյուն:

38. Տրված են միևնույն կետում կիրառված $\bar{a}=\{2,-3,6\}$ և $\bar{b}=\{-1,2,-2\}$ վեկտորները: Գտնել այն $\bar{c}$ վեկտորը, որն ուղղված է $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորներով կազմված անկյան կիսորդով և ունի $\left|\bar{c}\right|=3\sqrt{42}$ երկարություն:

39. Ապացուցել, որ A(3,-1,2), B(0,-4,2) և C(-3,2,1) գագաթներով եռանկյունը հավասարասրուն է:

40. Ապացուցել, որ A(4,-1,4), B(0,7,-4) և C(3,1,-2) գագաթներով եռանկյունը բութանկյուն է:

41. Ապացուցել, որ A(3,-2,5), B(-2,1,-3) և C(5,1,-1) գագաթներով եռանկյան ներքին անկյունները սուր անկյուններ են:

42. Տրված են $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$ և $(\bar{a}, \bar{b}) = 12$: Հաշվել $|\bar{a} \times \bar{b}|$:

43. Հայտնի է, որ $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: Հաշվել՝ 1) $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$ և 2) $|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})|$, եթե $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$:

44. Տրված են $\bar{a} = \{3,-1,-2\}$ և $\bar{b} = \{1,2,-1\}$ վեկտորները: Որոշել 1) $\bar{a} \times \bar{b}$, 2) $(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b}$, 3) $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$ վեկտորական արտադրյալները:

45. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ A(2,2), B(5,-2), C(3,-4): 1) Հաշվել A ներքին անկյունը և եռանկյան մակերեսը; 2) Ox առանցքի վրա գտնել այնպիսի M կետ, որպեսզի $\angle AMB = \frac{\pi}{2}$:

46. Տրված են A(2,-1,2), B(1,2,-1) և C(3,2,1) կետերը: Որոշել 1) $(\overline{AB} \times \overline{BC})^0$, 2) $(\overline{BC} - 2\overline{AC}) \times \overline{CB}$ վեկտորների կոորդինատները:

47. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ A(3,-4), B(2,3) և C(-2,5): 1) հաշվել A գագաթի ներքին անկյունը և եռանկյան մակերեսը; 2) Oy առանցքի վրա գտնել այնպիսի M կետ, որպեսզի $\angle AMB = \frac{\pi}{2}$:

48. Որոշել $\bar{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ նա ուղղահայաց է $\bar{a} = \{4,-2,-3\}$ և $\bar{b} = \{0,1,3\}$ վեկտորներին, կազմում է Oy առանցքի հետ բութ անկյուն և $|\bar{x}| = 26$:

49. Տրված են $\bar{a} = \{-2,1\}$ և $\bar{b} = \{1,2\}$ վեկտորները: Գտնել $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորներով կազմված անկյան կոսինուսը, եթե հայտնի է, որ $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորները բավարարում են հետևյալ համակարգին՝ $\begin{cases} 2\bar{x} + 3\bar{y} = \bar{a}; \\ \bar{x} - 2\bar{y} = \bar{b}: \end{cases}$

50. Տրված են A(1,-1,2), B(3,1,-4), C(2,1,-4) և D(1,-5,1) կետերը: Որոշել՝ 1) $(2\overline{AB} - \overline{BC}) \times (\overline{AD} - \overline{BD})$ վեկտորի կոորդինատները; 2) Պր$_{\overline{AC}}(\overline{AB} - \overline{BD})$;
3) ABCD բուրգի ծավալը; 4) $\overline{AB}$ վեկտորի պրոյեկցիան այն առանցքի վրա, որը Ox առանցքի հետ կազմում է 60°, Oy առանցքի հետ 45° անկյուններ, իսկ Oz առանցքի հետ՝ բութ անկյուն; 5) այն $\bar{x}$ վեկտորը, որն ուղղահայաց է $\overline{AB}$ և $\overline{AC}$ վեկտորներին, կազմում է Oy առանցքի հետ բութ անկյուն և $|\bar{x}| = \sqrt{10}$:

51. Տրված են $A(2,-1,1)$, $B(3,2,-4)$, $C(-1,3,2)$ և $D(3,-4,-6)$ կետերը: Որոշել 1) $(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}) \times (\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC})$; 2) Պր$_{\overline{AD}}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$, 3) V_{ABCD}; 4) բուրգի այն բարձրությունը, որը իջեցված է D-ից ABC եռանկյան հարթության վրա:

52. Տրված են $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$ և $\vec{c} = \{2,-4,5\}$ վեկտորները: Ի՞նչ համակարգ են կազմում $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ և $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ վեկտորների համախմբերը:

53. Համոզվել, որ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ և $\vec{c} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 15\hat{k}$ վեկտորները համահարթ են:

54. Տրված են $A(-1,2,3)$, $B(4,-4,2)$, $C(3,1,-4)$ և $D(0,1,3)$ կետերը: Հաշվել
1) V_{ABCD}; 2) Պր$_{\overline{AD}}(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$ 3) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) \times (3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$; 4) $|\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}|$; 5) $(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})^0$:

55. Հաշվել $(1+i)^3$; $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$ և i^{389}

56. Հաշվել $(1-i)^8$; $\frac{i}{3-i}$ և i^{3215}

57. Հաշվել $(-1+\sqrt{3}i)^5$; $\frac{i-1}{i+1}$ և i^{2341}

58. Հարթության վրա պատկերել հետևյալ կետերի բազմությունը՝ $|z-i-3|=5$; $|z-2i|>3$:

59. Հարթության վրա պատկերել հետևյալ կետերի բազմությունը՝ $|z-i-1|\le 2$; $|z+2|=4$; $|z|>3$:

60. Հարթության վրա պատկերել հետևյալ կետերի բազմությունը՝

$|z-2i|\ge 4$; $\left|z-\frac{5}{i}\right|\le 2$; $|z+3|\le 3$; $|z-i-2|\le 4$; $|z-2-i|>3$:

ԱՐԴՅՈՒՆՔ 2

Ուղիղ գիծը հարթության մեջ: Երկրորդ կարգի կորեր: Ուղիղ գիծը տարածության մեջ: Հարթության ընդհանուր հավասարումը

§1. Տեսական հարցեր

1. Ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումը, նրա հետազոտումը և կառուցումը:
2. Ուղիղ գծի հավասարումը անկյունային գործակցով, մեկ կետով անցնող և տրված ուղղությունն ունեցող ուղղի հավասարումը:
3. Երկու կետով անցնող ուղղի հավասարումը: Ուղղի նկատմամբ կետի համաչափ կետի կոորդինատների որոշումը:
4. Երկու ուղիղներով կազմված անկյան հաշվումը:
5. Ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները:
6. Ուղղի նորմալ հավասարումը:
7. Կետի հեռավորությունը ուղղից:
8. Կոորդինատների համակարգի զուգահեռ տեղափոխությունը:
9. Հարթ կորի ընդհանուր հավասարումը: Շրջանագծի սահմանումը և կանոնական հավասարումը:
10. Էլիպսի սահմանումը, կանոնական հավասարումը:
11. Պարաբոլի սահմանումը, կանոնական հավասարումը:
12. $y = ax^2 + bx + c$ պարաբոլի կառուցումը:
13. Հիպերբոլի սահմանումը, կանոնական հավասարումը:
14. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ հավասարման հետազոտումը:
15. Շրջանագծի ընդհանուր հավասարումը, նրա բերումը կանոնական տեսքի:
16. Հարթության ընդհանուր հավասարումը, նրա հետազոտումը և կառուցումը:
17. Ox, Oy և Oz առանցքներին զուգահեռ հարթությունների հավասարումները, նրանց կառուցումը:
18. Ox, Oy և Oz առանցքներով անցնող հարթությունների հավասարումները:
19. Երկու հարթություններով կազմված գծային անկյան որոշումը:
20. Երկու հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները:
21. Մեկ կետով անցնող հարթությունների խրծի հավասարումը:
22. Ուղիղ գիծը տարածության մեջ, նրա կանոնական հավասարումները:
23. Ուղղի ընդհանուր հավասարումը տարածության մեջ, նրա բերումը կանոնական տեսքի:

24. Ուղղի հավասարումը պրոյեկցիաներով:
25. Ուղղի և հարթության միջև կազմած անկյան որոշումը:
26. Ուղղի և հարթության փոխադարձ դիրքերը:
27. Յարթության նկատմամբ կետի համաչափ կետի կոորդինատների որոշումը:
28. Ուղղի նկատմամբ կետի համաչափ կետի կոորդինատների որոշումը:
29. Երկու ուղիղներով անցնող հարթության հավասարումը:
30. Տրված կետով տրված ուղղին տարած ուղղահայաց և զուգահեռ հարթությունների հավասարումները:

§2. Տիպային խնդիրների լուծում

1. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացված հետևյալ կետերից` A(-1,2) և B(3,-4):

Լուծում: Ինչպես գիտենք AB հատվածի ծայրակետերից հավասարապես են հեռացված այդ հատվածի միջնաուղղահայացի M(x,y) կետերը: Հետևաբար $\left|\overline{MA}\right| = \left|\overline{MB}\right|$: Գրելով այդ հավասարությունը կոորդինատներով, կստանանք` $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}$ : Այստեղից`

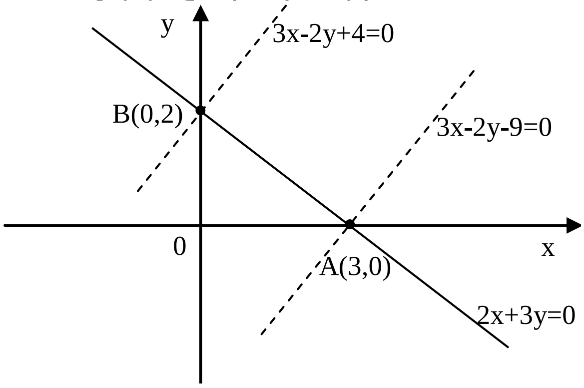
$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y-4)^2 \Rightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=$$

$$=x^2-6x+9+y^2-8y+16 \Rightarrow 8x-12y=2 \Rightarrow 2x-3y=5$$

Հետևաբար այդ կետերի երկրաչափական տեղը կլինի $2x-3y=5$ ուղիղ գիծը:

2. Կառուցել $2x+3y=6$ ուղիղը և կազմել այդ ուղղի կոորդինատային առանցքների հետ հատման կետերում նրան տարված ուղղահայաց ուղիղների հավասարումները:

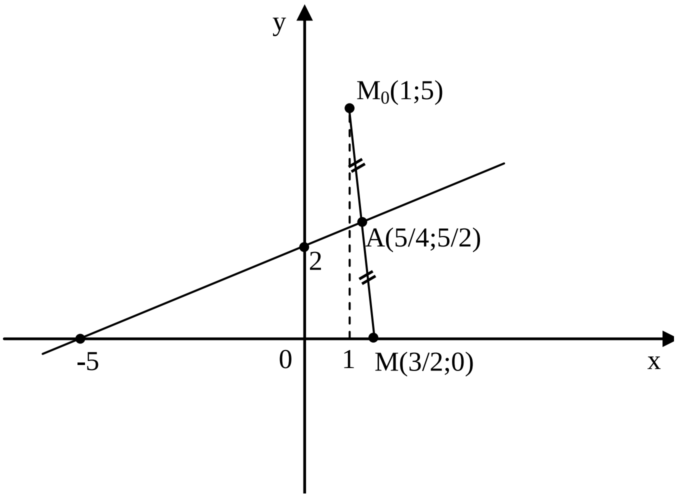
Լուծում: Կառուցենք տրված ուղիղը: Դրա համար մեզ պետք են երկու կետեր: Ox-երի հետ ուղղի հատման կետը որոշելու համար y կոորդինատին տանք 0 արժեքը և որոշենք x-ը` x=3, նույն ձևով կորոշենք Oy-ների հետ հատման կետը` B(0,2):



A(3,0) կետում $2x+3y=6$ ուղղին տարված ուղղահայաց ուղղի հավասարումը կլինի` $y-0=k(x-3)$, որտեղ k անկյունային գործակիցը որոշվում է` $k\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$ ուղղահայացության պայմանից: $k=\frac{3}{2}$, հետևաբար` $y=\frac{3}{2}(x-3)$ կամ $3x-2y-9=0$: B(0,2) կետում ուղղին տարված ուղղահայացի հավասարումը կլինի` $y-2=\frac{3}{2}(x-0)$, կամ $3x-2y+4=0$:

3. Որոշել $M_0(1,-5)$ կետի համաչափ կետը $2x-5y+10=0$ ուղղի նկատմամբ:

Լուծում: Կառուցենք $2x-5y=-10$ ուղիղը և M_0 կետի համաչափ M կետը այդ ուղղի նկատմամբ:



Կազմենք M_0 կետով անցնող ու $2x-5y=-10$ ուղղին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը: Քանի որ $k\cdot k_1=-1$, ապա $k\cdot\frac{2}{5}=-1\Rightarrow k=-\frac{5}{2}$: Հետևաբար ուղղահայաց ուղղի հավասարումը կլինի՝ $y-5=-\frac{5}{2}(x-1)\Rightarrow 2y+5x=15$:

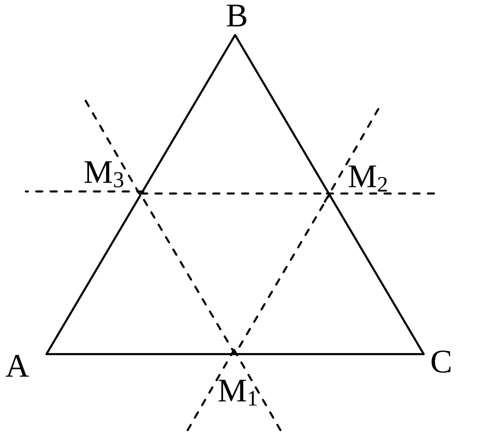
Լուծելով հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}2x+5y=15,\\2x-5y=-10,\end{cases}$$

կստանանք A կետի կոորդինատները՝ $x_A=\frac{5}{4}, y_A=\frac{5}{2}$: Քանի որ M_0 կետի համաչափ M կետի համար ունենք՝ $\left|\overline{M_0A}\right|=\left|\overline{AM}\right|$, ապա A միջնակետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմանին՝ $x_A=\frac{x_{M_0}+x_M}{2}$, $y_A=\frac{y_{M_0}+y_M}{2}$, որտեղից $x_M=\frac{3}{2}, y_M=0$: Հետևաբար M_0 կետի համաչափ կետը $2x-5y+10=0$ ուղղի նկատմամբ կլինի $M\left(\frac{3}{2},0\right)$ կետը, որը գտնվում է Ox առանցքի վրա:

4. Տրված են ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերը $M_1(-1{,}2)$, $M_2(3{,}4)$ և $M_3(2{,}-5)$: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

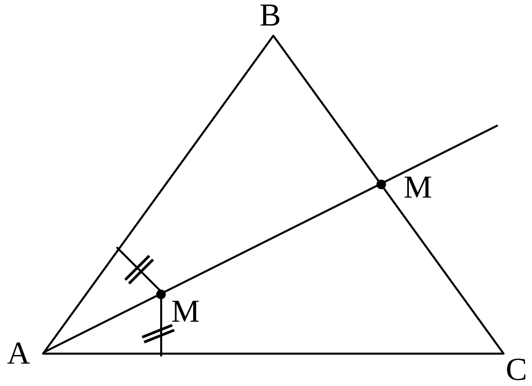
Լուծում:



M_1 և M_2 կետերով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝ $\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-2}{4-2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$:

Հետևաբար՝ $k=\frac{1}{2}$: Քանի որ AB կողմով անցնող ուղիղը անցնում է M_3 կետով և զուգահեռ է M_1 և M_2 կետերով անցնող ուղղին, ապա AB կողմով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝ $y+5=\frac{1}{2}(x-2)$, կամ $2y-x=-12$: Նույն ձևով կստանանք BC կողմով անցնող ուղղի հավասարումը, որն անցնում է M_2 կետով և զուգահեռ է M_1 և M_3 կետերով անցնող ուղղին: M_1 և M_3 կետերով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝ $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{-5-2}\Rightarrow 3y+7x+1=0\Rightarrow k=-\frac{7}{3}$: Հետևաբար BC կողմով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝ $y-4=-\frac{7}{2}(x-3)$, կամ $3y+7x-33=0$: AC կողմով անցնող ուղղի հավասարումը թողնում ենք ընթերցողին:

5. Հայտնի են ABC եռանկյան գագաթները՝ $A(1,-2), B(5,4)$ և $C(-2,0)$: Կազմել A գագաթից տարված ներքին անկյան կիսորդով անցնող ուղղի հավասարումը:
Լուծում:



Խնդիրը կարելի է լուծել երկու եղանակով: 1) Ըստ անկյան կիսորդի հատկության $\frac{|\overline{BM}|}{|\overline{MC}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}=\frac{\sqrt{(5-1)^2+(-2-4)^2}}{\sqrt{(-2-1)^2+(0+2)^2}}=\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}=2$: Հետևաբար՝ $\lambda=\frac{|\overline{BM}|}{|\overline{MC}|}=2$: Եթե BC հատվածը M կետի միջոցով բաժանված է $\lambda=2$ հարաբերությամբ, ապա՝

$$x_M=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda},\ y_M=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}\Rightarrow x_M=\frac{5+2(-2)}{1+2}=\frac{1}{3}; y_M=\frac{4+2\cdot 0}{1+2}=\frac{4}{3}:$$

Հետևաբար AM կիսորդի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{y+2}{\frac{4}{3}+2}=\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}\Rightarrow\frac{y+2}{5}=-x+1\Rightarrow y+5x-3=0:$$

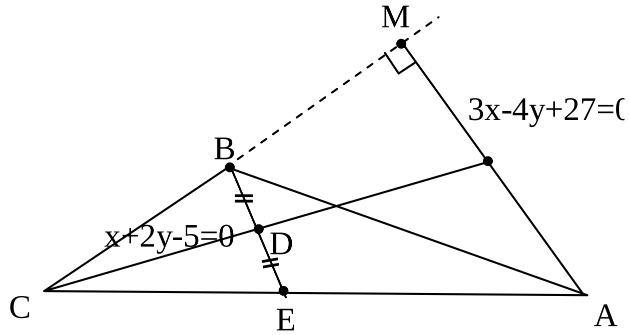
2) Քանի որ անկյան կիսորդը այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որը հավասարապես է հեռացված անկյան AB և AC կողմերից, ապա կազմենք AB և AC կողմերով անցնող ուղիղների հավասարումները և $M(x,y)$ կետի հեռավորությունները այդ ուղիղներից ու այդ հեռավորությունները իրար հավասարեցնենք: AB-ով անցնող ուղղի

հավասարումը կլինի՝ $\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+2}{4+2}\Rightarrow 3x-2y=7$, իսկ AC-ով անցնող ուղղի հավասարումը՝ $\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y+2}{0+2}\Rightarrow 2x+3y=-4$: Նկատենք, որ ներքին անկյան կիսորդի կետերի համար կետի շեղվածությունը անկյան կողմերից կլինեն տարբեր նշանի, սկզբնակետի ցանկացած դասավորվածության դեպքում: Հետևաբար՝ $\delta_1=-\delta_2$, կամ

$$\frac{3x-2y-7}{\sqrt{2^2+3^2}}=-\frac{2x+3y+4}{\sqrt{2^2+3^2}}\Rightarrow 3x-2y-7=-(2x+3y+4)\Rightarrow y+5x-3=0:$$

6. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է $B(2,-1)$ գագաթը և բարձրության՝ $3x-4y+27=0$ ու անկյան կիսորդի՝ $x+2y-5=0$ հավասարումները, որոնք տարված են տարբեր գագաթներից:

Լուծում:



Քանի որ $k_{AM}=\frac{3}{4}$ և AM ուղիղը ուղղահայաց է BC ուղղին, ապա $k_{BC}\cdot\frac{3}{4}=-1\Rightarrow k_{BC}=-\frac{4}{3}$: Հետևաբար BC կողմով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝ $y+1=-\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow 3y+4x=5$: C գագաթի կոորդինատները որոշելու համար լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}3y+4x=55,\\ x+2y=5:\end{cases}$$

Լուծելով այդ համակարգը, կստանանք՝ $x_C=-1, y_C=3$: B գագաթի համաչափ E կետը $x+2y-5=0$ անկյան կիսորդի նկատմամբ կգտնվի AC կողմով անցնող ուղղի վրա, քանի որ անկյան կիսորդի կետերը հավասարապես են հեռացված անկյան կողմերից: Որոշենք B գագաթի համաչափ E կետի կոորդինատները $x+2y-5=0$ ուղղի նկատմամբ: Կազմենք BE ուղղի հավասարումը, որը ուղղահայաց է $x+2y-5=0$ ուղղին: Ունենք՝ $k_{BE}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Rightarrow k_{BE}=2\Rightarrow y+1=2(x-1)\Rightarrow \quad \Rightarrow y-2x=-5$:

Որոշենք D կետի կոորդինատները: Դրա համար լուծենք համակարգը՝

$$\begin{cases}y-2x=-5,\\ x+2y=5:\end{cases}$$

Լուծելով, կստանանք՝ $x_D=3, y_D=1$: Ըստ հատվածի միջնակետի հատկության՝

$$3=\frac{x_B+x_E}{2},1=\frac{y_B+y_E}{2}\Rightarrow 3=\frac{2+x_E}{2};1=\frac{-1+y_E}{2}\Rightarrow x_E=4,y_E=3:$$

Այժմ կազմենք AC կողմով անցնող ուղղի հավասարումը՝ $\frac{y-3}{3-3}=\frac{x-4}{-1-4}\Rightarrow y-3=0$:

AC կողմի հավասարումը կլինի՝ $y=3$: A կետի կոորդինատները որոշելու համար լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}3x-4y+27=0,\\ y=3\end{cases}\Rightarrow x_A=-5,y_A=3:$$

Հետևաբար AB կողմով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x+5}{2+5}\Rightarrow 7y+4x=1:$$

7. Որոշել հետևյալ ուղիղների՝ $5x-12y+26=0$ և $5x-12y-13=0$ միջև եղած հեռավորությունը:

Լուծում: Նախ նկատենք, որ տրված ուղիղները իրար զուգահեռ են, որովհետև $k_1=k_2$: Վերցնենք $5x-12y+26=0$ ուղղի վրա մի որևէ կետ: Դրա համար y-ին տանք մի որևէ արժեք, օրինակ $y=\frac{1}{2}$, ստացված հավասարումից կստանանք՝ $x=-4$: Այնուհետև որոշենք $M\left(-4,\frac{1}{2}\right)$ կետի հեռավորությունը $5x-12y-13=0$ ուղղից՝

$$d=\frac{|5x-12y-13|_M}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{\left|5\cdot(-4)-12\cdot\frac{1}{2}-13\right|}{13}=\frac{39}{13}=3:$$

Հետևաբար այդ ուղիղների միջև եղած հեռավորթյունը հավասար է 3-ի:

8. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են $A(-2,5)$ կետով և հավասարահեռ են տրված $B(4,3)$ և $C(-7,2)$ կետերից:

Լուծում: Կազմենք $A(-2,5)$ կետով անցնող ուղիղների փնջի հավասարումը՝ $y-5=k(x+2)\Rightarrow y-kx=5+2k$: Այնուհետև որոշենք B և C կետերի հեռավորությունները այդ ուղղից ու հավասարեցնենք միմյանց:

$$d_B=\frac{|3-4k-5-2k|}{\sqrt{1+k^2}};d_C=\frac{|2+7k-5-2k|}{\sqrt{1+k^2}},d_B=d_C\Rightarrow\frac{|2+6k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|5k-3|}{\sqrt{1+k^2}}\Rightarrow$$

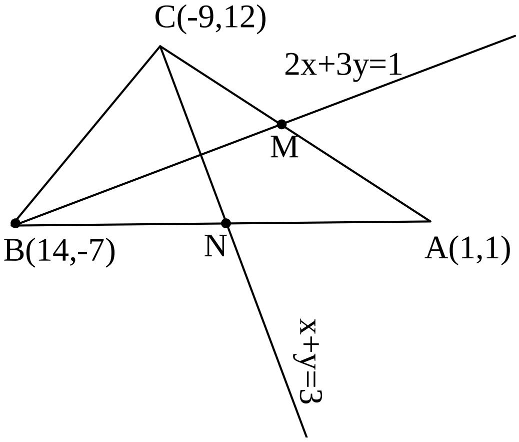
$\Rightarrow|2+6k|=|5k-3|$: Այստեղից՝ կամ $2+6k=5k-3\Rightarrow k=-5$, կամ $2+6k=-(5k-3)\Rightarrow k=\frac{1}{11}$:

Հետևաբար որոնելի ուղիղների հավասարումներն են՝

$$y-5=-5(x+2)\Rightarrow y+5x+5=0 \text{ և } y-5=\frac{1}{11}(x+2)\Rightarrow 11y-x-57=0:$$

9. Եռանկյան երկու միջնագծերը ընկած են $x+y=3,\quad 2x+3y=1$ ուղիղների վրա, իսկ $A(1,1)$ կետը հանդիսանում է եռանկյան գագաթը: Կազմել եռանկյան կողմերով անցնող ուղիղների հավասարումները:

Լուծում:



Քանի որ M կետը հանդիսանում է CA հատվածի միջնակետը, ապա՝ $x_M=\frac{1+x_C}{2}, y_M=\frac{1+y_C}{2}$: $C(x_C,y_C)$ կետը գտնվում է $x+y=3$ ուղղի վրա, իսկ M-ը $2x+3y=1$ ուղղի վրա, հետևաբար կարող ենք գրել հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_C+y_C=3 \\ 2\cdot\frac{1+x_C}{2}+3\cdot\frac{1+y_C}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C+y_C=3 \\ 2x_C+3y_C=-3 \end{cases}\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow y_C=-9, x_C=12:$$

Նույն ձևով կորոշենք B գագաթի կոորդինատները, եթե հաշվի առնենք, որ $x_N=\frac{1+x_B}{2}, y_N=\frac{1+y_B}{2}$, և որ B գագաթը գտնվում է $2x+3y=1$ ուղղի վրա: Լուծելով հետևյալ համակարգը՝ կստանանք B գագաթի կոորդինատները:

$$\begin{cases} 2x_B+3y_B=1 \\ \frac{1+x_B}{2}+\frac{1+y_B}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_B+3y_B=1 \\ x_B+y_B=4 \end{cases}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow y_B=-7, x_B=14$$

AB կողմով անցնող ուղղի հավասարումը՝ $\frac{x-1}{11-1}=\frac{y-1}{-7-1} \Rightarrow 5y+4x-9=0$; AC-ով անցնող ուղղի հավասարումը՝ $\frac{x-1}{-9-1}=\frac{y-1}{12-1} \Rightarrow 11y+10x-21=0$; BC-ով անցնող ուղղի հավասարումը՝ $\frac{y+9}{-7+9}=\frac{x-12}{11-12} \Rightarrow 2x+y-15=0$:

10. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, եթե նա անցնում է $A(3,1)$ և $B(-1,3)$ կետերով, և նրա կենտրոնը գտնվում է $3x-y=2$ ուղղի վրա:

Լուծում: Եթե շրջանագծի կենտրոնը $O(a,b)$ կետն է, իսկ շառավիղը R, ապա նրա կանոնական հավասարումն է $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$: Ուրեմն շրջանագծի հավասարումը կազմելու համար պետք է իմանալ O կենտրոնի a և b կոորդինատները և R շառավիղը: Քանի որ $O(a,b)$ կետը գտնվում է $3x-y=2$ ուղղի վրա և այդ կետի հեռավորությունները A և B կետերից իրար հավասար են, ապա a և b թվերը կարելի է որոշել հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} 3a-b=2 \\ (a-3)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-b=2 \\ 8a-4b=0 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=4:$$

$R^2 = \left|\overline{OA}\right|^2 = (2-3)^2 + (4-1)^2 = 1+9 = 10$: Շրջանագծի հավասարում կլինի՝ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$:

11. Բերել կանոնական տեսքի հետևյալ շրջանագծերի հավասարումները՝

1) $x^2 + 4y + 6x + y^2 - 15 = 0$; 2) $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$:

Լուծում: 1) $x^2 + 4y + 6x + y^2 - 15 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 15 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = 28$:

2) $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$:

12. Կազմել այն ուղղի պարամետրական հավասարումները, որն անցնում է $M_0(-1,2,-3)$ կետով և զուգահեռ է $\overline{AB}$ վեկտորին, որտեղ $A(-1,5,-4)$ և $B(2,0,-3)$:

Լուծում: Որոշենք $\overline{AB}$ վեկտորի կոորդինատները՝ $\overline{AB} = \{3,-5,1\}$: Քանի որ ուղիղը զուգահեռ է $\overline{AB}$ վեկտորին, ապա կարելի է վերցնել $\overline{S} = \overline{AB}$: Հետևաբար որոնելի ուղղի կանոնական հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{1} = t \Rightarrow x = 3t - 1; y = -5t + 2 \text{ և } z = t - 3:$$

13. Կազմել այն ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $M_0(1,-2,-1)$ կետով, ուղղահայաց է $\overline{a} = \{2,-1,-2\}$ վեկտորին և հատում է

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

ուղղին:

Լուծում: Որոնելի ուղղի կանոնական հավասարումներն են՝

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z+1}{p}:$$

Տրված ուղղի ընդհանուր հավասարումը բերենք կանոնական տեսքի: Դրա համար z կոորդինատին տանք մի որևէ արժեք, օրինակ 0, ու լուծենք ստացված երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1:$$

Հետևաբար ուղիղն անցնում է $M_1(2,-1,0)$ կետով: Այդ ուղղի ուղղորդ վեկտոր կարելի է վերցնել $n_1 = \{1,-2,3\}$ և $n_2 = \{3,2,-5\}$ նորմալների վեկտորական արտադրյալը, քանի որ այն համագիծ է $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$-ին:

$$\overline{S}_1 = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 14\hat{j} + 8\hat{k}:$$

Հետևաբար տրված ուղղի կանոնական հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}:$$

Քանի որ որոնելի ուղիղը ուղղահայաց է $\bar{a}=\{2,-1,-2\}$ վեկտորին, ապա $(\bar{S},\bar{a})=0 \Rightarrow 2m-n-2p=0$: Մյուս կողմից հայտնի է, որ որոնելի ուղիղը հատում է $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$ ուղղին, հետևաբար $\bar{S},\bar{S}_1$ և $\overline{M_0M_1}=\{1,1,1\}$ վեկտորները համահարթ են, ուրեմն նրանց խառը արտադրյալը հավասար է 0-ի:

$$(\bar{S},\bar{S}_1,\overline{M_0M_1})=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3m+2n-5p=0:$$

Այսպիսով՝ m,n և p թվերը որոշելու համար կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} 3m+2n-5p=0 \\ 2m-n-2p=0 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{9}{7}p, n=\frac{4}{7}p:$$

Հետևաբար որոնելի ուղղի կանոնական հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-1}{\frac{9}{7}p}=\frac{y+2}{\frac{4}{7}p}=\frac{z+1}{p}:$$

Կրճատելով p-ով և հայտարարները բազմապատկելով 7-ով, կստանանք՝

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{7}:$$

14. 1) Ապացուցել, որ հետևյալ ուղիղները՝

$$\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases} \text{ և } \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}$$

ուղղահայաց են:

2) Որոշել առաջին ուղղի պրոյեկցիան $3x-2y+5z=4$ հարթության վրա:

Լուծում: 1) Երկու ուղիղների ուղղահայացությունը համարժեք է նրանց $\bar{S}_1$ և $\bar{S}_2$ ուղղորդ վեկտորների ուղղահայացությունը: Որպես $\bar{S}_1$ և $\bar{S}_2$ կարելի է վերցնել համապատասխանաբար առաջին ուղիղը կազմող հարթությունների և երկրորդ ուղիղը կազմող հարթությունների նորմալների վեկտորական արտադրյալները՝

$$\bar{S}_1=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix}=-12\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k};\ \bar{S}_2=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=3\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}:$$

Կազմենք $\bar{S}_1$ և $\bar{S}_2$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝

$(\bar{S}_1,\bar{S}_2)=(-12)\cdot 3+3\cdot 6+(-3)(-6)=0$: Հետևաբար այդ ուղիղները ուղղահայաց են:

2) Կազմենք $\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ ուղղով անցնող հարթությունների խրձի հավասարումը՝

$$x+y-3z-1+\lambda(2x-y-9z-2)=0 \Rightarrow (1+2\lambda)x+(1-\lambda)y+(-3-9\lambda)z-(1+2\lambda)=0$$

: Ուղիղը պրոյեկտող հարթությունը պետք է ուղղահայաց լինի $3x-2y+5z=4$ հարթությանը: Հարթությունների խրձից ընտրենք այն հարթությունը, որն ուղղահայաց է $3x-2y+5z=4$ հարթությանը: Դրա համար կազմենք

$\overline{n}_1 = \{1+2\lambda, 1-\lambda, -3-9\lambda\}$ և $\overline{n}_2 = \{3,-2,5\}$ նորմալների սկալյար արտադրյալն ու այն հավասարեցնենք 0-ի՝

$$3(1+2\lambda) - 2(1-\lambda) + 5(-3-9\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{14}{37}:$$

Տեղադրելով $\lambda = -\frac{14}{37}$ արժեքը հարթության հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\left(1-\frac{28}{37}\right)x + \left(1+\frac{14}{37}\right)y + \left(-3+\frac{9\cdot 14}{37}\right)z - 1 + \frac{28}{37} = 0 \Rightarrow$$

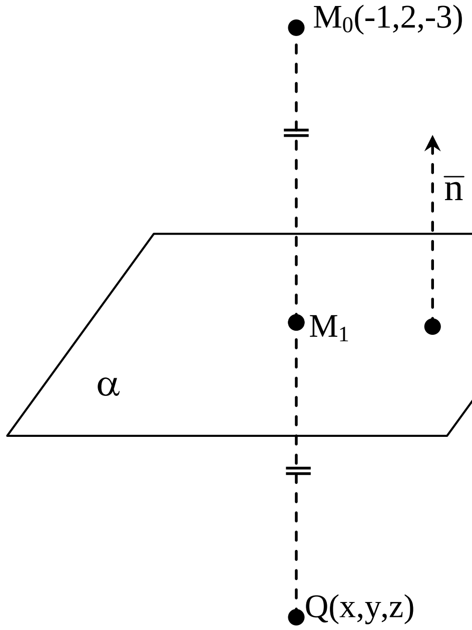
$$\Rightarrow \frac{9x}{37} + \frac{51}{37}y + \frac{15}{37}z - \frac{9}{37} = 0 \Rightarrow 3x + 17y + 5z - 3 = 0$$

Հետևաբար տրված հավասարումների համակարգով որոշվող ուղղի պրոյեկցիան $3x - 2y + 5z = 4$ հարթության վրա կտրվի հետևյալ հավասարումների համակարգով՝

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4, \\ 3x + 17y + 5z - 3 = 0: \end{cases}$$

15. Որոշել $M_0(-1,2,-3)$ կետի համաչափ Q կետը $2x - 3y - z - 9 = 0$ հարթության նկատմամբ:

Լուծում:



Տանենք M_0 կետով ուղիղ՝ ուղղահայաց $2x - 3y - z - 9 = 0$ հարթությանը: Այդ ուղղի ուղղորդ վեկտոր կարող է հանդիսանալ $2x - 3y - z - 9 = 0$ հարթության $\overline{n} = \{2,-3,-1\}$ նորմալը: Ուղղի կանոնական հավասարումներն են $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{-1}$: Լուծելով հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{-1} = t \\ 2x - 3y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 1, y = 2 - 3t, z = -3 - t \\ 2x - 3y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

կստանանք՝ $x_1 = 1, y_1 = -1$ և $z_1 = -4$: Քանի որ M_1 կետը հանդիսանում է M_0Q

հատվածի միջնակետը, ապա՝ $1=\frac{x-1}{2};-1=\frac{2+y}{2};-4=\frac{-3+z}{2}\Rightarrow x=3, y=-4, z=-5$։
Հետևաբար M_0 կետի համաչափ կետը կլինի՝ $Q(3,-4,-5)$։

§3. Խնդիրներ

1. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացված հետևյալ կետերից՝
   1) A(3,2) և B(2,3), 2) A(-4,1) և B(5,-3):
2. Տրված է $2x+3y+4=0$ ուղիղը: Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2,1)$ կետով և
   1) զուգահեռ է տրված ուղղին,
   2) ուղղահայաց է տրված ուղղին:
3. Գտնել $3x-4y-29=0$ և $2x+5y+19=0$ ուղիղների հատման կետի կոորդինատները:
4. Կառուցել $2x+5y-10=0$, $2x=5$, $3x-y=6$ և $y=-3x$ ուղիղները և կազմել $2x+5y=10$ ուղղի Oy առանցքի հետ հատման կետում նրան տարած ուղղահայաց ուղղի հավասարումը:
5. Տրված են $M_1(3,1), M_2(2,3), M_3(6,3), M_4(-3,-3), M_5(3,-1)$ և $M_6(-2,1)$ կետերը: Որոշել, թե այդ կետերից որոնք են պատկանում $2x-3y-3=0$ ուղղին և որոնք՝ ոչ:
6. Տրված են զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումները $8x+3y+1=0$ և $2x+y-1=0$ և անկյունագծերից մեկի հավասարումը՝ $3x+2y+3=0$: Որոշել զուգահեռագծի գագաթների կոորդինատները:
7. Տրված է ուղղանկյան A(2,-3) գագաթը և երկու կողմերի հավասարումները՝ $2x-3y+5=0$ և $3x+2y-7=0$: Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:
8. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $x-2y=0$ և $x-2y+15=0$, ու անկյունագծերից մեկի հավասարումը՝ $7x+y-15=0$: Գտնել ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները:
9. Որոշել M(-6,4) կետի պրոյեկցիան $4x-5y+3=0$ ուղղի վրա:
10. Որոշել M(-5,13) կետի համաչափ կետը $2x-3y-3=0$ ուղղի նկատմամբ:
11. Տրված է եռանկյան կողմերի միջնակետերը $M_1(2,1), M_2(5,3)$ և $M_3(3,-4)$: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:
12. Որոշել $M_0(-6,4)$ կետի համաչափ կետը $4x-5y+3=0$ ուղղի նկատմամբ:
13. Տրված են ABC եռանկյան A(2,1), B(-1,-1) և C(3,2) գագաթները: Կազմել բարձրությունների հավասարումները:
14. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$ և $x+5y-7=0$: Որոշել բարձրությունների հատման կետի կոորդինատները:
15. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(1,-1), B(-2,1) և C(3,5): Կազմել այն ուղղահայացի հավասարումը, որն իջեցված է A գագաթից՝ B գագաթից տարված միջնագծի վրա:
16. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ A(3,2), B(5,-2) և C(1,0): Կազմել միջին գծերի հավասարումները:

17. Տրված $M_1(-1,2)$ և $M_2(2,3)$ կետերով տարված է ուղիղ գիծ: Որոշել այդ ուղղի հատման կետերը Ox և Oy առանցքների հետ:
18. Տրված են ABCD զուգահեռագծի երկու կից գագաթները՝ A(-3,-1) և B(2,2) ու անկյունագծերի հատման Q(3,0) կետը: Կազմել այդ զուգահեռագծի կողմերի հավասարումները:
19. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումները՝ $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$ և անկյունագծերից մեկի հավասարումը՝ $3x+7y-10=0$: Կազմել մյուս կողմերի ու անկյունագծի հավասարումները:
20. Որոշել M(-8,12) կետի համաչափ կետը A(2,-3) և B(-5,1) կետերով անցնող ուղղի նկատմամբ:
21. Որոշել M(8,9) կետի համաչափ կետը A(3,-4) և B(-1,-2) կետերով անցնող ուղղի նկատմամբ:
22. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2,1)$ կետով և կազմում է $2x+3y+4=0$ ուղղի հետ 45° անկյուն:
23. Քառակուսու գագաթներից մեկը A(-4,5) կետն է, իսկ անկյունագծերից մեկը գտնվում է $7x-y+8=0$ ուղղի վրա: Կազմել նրա կողմերի և մյուս անկյունագծի հավասարումները:
24. Հետևյալ կետերը A(-1,3) և C(6,2) հանդիսանում են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները: Կազմել քառակուսու կողմերի հավասարումները:
25. Հայտնի է քառակուսու E(1,-1) կենտրոնը և կողմերից մեկի հավասարումը՝ $x-2y+12=0$: Կազմել քառակուսու մյուս կողմերի հավասարումները:
26. Տրված են եռանկյան A(-10,2) և B(6,4) գագաթներն ու բարձրությունների հատման N(5,2) կետը: Որոշել C գագաթի կոորդինատները:
27. Տրված են եռանկյան A(3,-2) և B(5,7) գագաթներն ու բարձրությունների հատման N(4,-1) կետը: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:
28. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է նրա B(-4,-5) գագաթը և երկու բարձրությունների հավասարումները՝ $5x+3y-4=0$ և $3x+8y+13=0$:
29. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է նրա A(4,-5) գագաթը և նրա երկու անկյան կիսորդների հավասարումները՝ $x-1=0$ և $x-y-1=0$:
30. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է B(2,6) գագաթը և մեկ գագաթից տարված բարձրության՝ $x-7y+15=0$ և անկյան կիսորդի՝ $7x+y-5=0$ հավասարումները:

31. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է B(2,-1) գագաթը և բարձրության՝ $3x-4y+27=0$ ու անկյան կիսորդի՝ $x+2y-5=0$ հավասարումները, որոնք տարված են տարբեր գագաթներից:

32. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է C(4,-1) գագաթը և մեկ գագաթից տարված բարձրության՝ $2x-3y+12=0$ ու միջնագծի՝ $2x+3y=0$ հավասարումները:

33. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է B(2,-7) գագաթը և տարբեր գագաթներից տարված բարձրության՝ $3x+y+11=0$ և միջնագծի՝ $x+2y+7=0$ հավասարումները:

34. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է C(4,-1) գագաթը և մեկ գագաթից տարված անկյան կիսորդի՝ $x+2y-5=0$ և միջնագծի՝ $4x+13y-10=0$ հավասարումները:

35. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է A(3,-1) գագաթը և տարբեր գագաթներից տարված ներքին անկյան կիսորդի՝ $x-4y+10=0$ և միջնագծի՝ $6x+10y-59=0$ հավասարումները:

36. Տրված են եռանկյան A(-1,-2) և B(3,4) գագաթները և C գագաթով անցնող ներքին անկյան կիսորդը՝ $2x-y+5=0$: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

37. Հաշվել այն եռանկյան մակերեսը, որն անջատում է $3x-4y-12=0$ ուղիղը կոորդինատային անկյունից:

38. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ A(-10,-13), B(-2,3) և C(2,1): Հաշվել B գագաթի հեռավորությունը C գագաթից տարված միջնագծից:

39. Հաշվել հետևյալ ուղիղների՝ 1) $3x-4y-10=0$ և $6x-8y+5=0$, 2) $5x-12y+26=0$ և $5x-12y-13=0$; 3) $4x-3y+15=0$ և $8x-6y+25=0$ միջև եղած հեռավորությունը:

40. Հաշվել հետևյալ ուղիղների՝ 1) 3x-4y-10=0 և 3x-4y+17=0; 2) 5x-12y+26=0 և 5x-12y-13=0; 3) 15x-20y-9=0 և 6x-8y+21=0 միջև եղած հեռավորությունը:

41. Եռանկյան գագաթներն են՝ A(2, 5), B(0, -1) և C(-2, 6): Հաշվել A գագաթի հեռավորությունը C գագաթից տարված միջնագծից:

42. Տրված են եռանկյան A(-1, 2) և B(2, 4) գագաթները և C գագաթով անցնող ներքին անկյան կիսորդը՝ x-2y+1=0: Կազմել BC կողմի հավասարումը:

43. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե տրված է A(-1, 2) գագաթը և մի գագաթից տարված անկյան կիսորդի՝ x-2y-1=0 և բարձրության՝ x+y+2=0 հավասարումները:

44. Եռանկյան երկու գագաթներն են A(-1, 3) և B(2, 5) կետերը, իսկ բարձրությունների հատման կետը՝ H(1, 4) կետը: Որոշել երրորդ գագաթի կոորդինատները և կողմերի հավասարումները:

45. Տրված են եռանկյան կողմերի հավասարումները՝ x+2y+1=0, 2x-y-2=0, 2x+y+2=0: Կազմել երրորդ կողմի վրա իջեցված բարձրության հավասարումը:

46. Որոշել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

1) 2x+y-1=0 և y-x=2;

2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4}$ և $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}$;

3) x=4 և 2x-y-1=0;

4) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}$ և $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{-4}$;

5) $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}$ և $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+5}{1}$:

47. Տրված են եռանկյան երկու գագաթների՝ A(2, -1) և B(1,5) ու կիսորդների հատման M(3,0) կետի կոորդինատները: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

48. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է M(3,5) կետով և հավասարապես է հեռացված A(-7,3) և B(11,15) կետերից:

49. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն P կետը, որի հեռավորությունների գումարը $M_1(1,2)$ և $M_2(3,4)$ կետերից լինի ամենափոքրը:

50. $2x-y-5=0$ ուղղի վրա գտնել այն P(x,y) կետը, որի հեռավորությունների գումարը A(-7,1) և B(-5,5) կետերից լինի ամենափոքրը:

51. Կազմել ուղղի կանոնական հավասարումները, եթե նա անցնում է տրված երկու կետերով՝ 1) (1,-2,1), (3,1,-1); 2) (3,-1,0), (1,0,-3); 3)(0,-2,3), (3,-2,1):

52. Կազմել ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $M_0(2,0,-3)$ կետով և զուգահեռ է՝ 1) $\bar{a}=\{2,-3,5\}$ վեկտորին; 2) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ ուղղին; 3) Ox առանցքին և 4) Oy առանցքին:

53. Տրված են եռանկյան գագաթները՝ A(3,6,-7); B(-5,2,3); և C(4,-7,-2): Կազմել C գագաթից տարված միջնագծի պարամետրական հավասարումները:

54. Կազմել ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $M_0(2,3,-5)$ կետով և զուգահեռ է հետևյալ ուղղին՝ $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0:\end{cases}$

55. Կազմել հետևյալ ուղիղների կանոնական հավասարումները՝

1) $\begin{cases}x-2y+3z-4=0,\\ 3x+2y-5z-4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+y+z=0;\\ 2x+3y-2z+5=0:\end{cases}$

56. Կազմել հետևյալ ուղիղների պարամետրական հավասարումները՝

1) $\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\ 3x-5y+2z+1=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y-z-6=0,\\ 2x-y+z+1=0:\end{cases}$

57. Ապացուցել հետևյալ ուղիղների զուգահեռությունը՝

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ և $\begin{cases}x+y-z=0,\\ x-y-5z-8=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0; \end{cases}$ և $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0: \end{cases}$

58. Ապացուցել հետևյալ ուղիղների ուղղահայացությունը՝

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ և $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0; \end{cases}$ և $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0: \end{cases}$

59. Որոշել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝ $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$,

$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$:

60. Որոշել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյան կոսինուսը՝

$\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0: \end{cases}$

61. Կազմել այն ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $M_0(-1,2,-3)$ կետով, ուղղահայաց է $\bar{a}=\{6,-2,-3\}$ վեկտորին և հատում է $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$ ուղղին:

62. Որոշել ուղղի և հարթության հատման կետը՝

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0;$

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0;$

63. Կազմել ուղղի կանոնական հավասարումները, եթե այն անցնում է $M_0(2,-3,-5)$ կետով և ուղղահայաց է 6x-3y-5z+2=0 հարթությանը:

64. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_0(1,-2,1)$ կետով և ուղղահայաց է հետևյալ ուղղին՝ $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0: \end{cases}$

65. Որոշել $M_0(-2,1,-3)$ կետի համաչափ կետը 2x-3y-z+1=0 հարթության նկատմամբ:

66. Որոշել P(5,2,-1) կետի պրոյեկցիան 2x-y+3z+23=0 հարթության վրա:

67. Որոշել M(1,3,-4) կետի համաչափ կետը 3x+y-2z=0 հարթության նկատմամբ:

68. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է M(1,3,1) կետով և զուգահեռ է հետևյալ ուղղին՝

1) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 2x+3y+z=0; \end{cases}$ 2) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+2}{21}$:

69. Որոշել 4x+4y-7z+1=0 հարթության և հետևյալ ուղղի միջև կազմված անկյունը՝

1) $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x+y+3z+2=0; \end{cases}$ 2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-6}$;

70. Որոշել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

1) $\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ x+3y+z+2=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y-z+2=0, \\ x+y+z-1=0; \end{cases}$

2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-1},\ \frac{x+1}{-3}=\frac{y}{4}=\frac{z-10}{6}$:

71. Տրված 2x-3y+3z-17=0 հարթության վրա գտնել այն M կետը, որի հեռավորությունների գումարը A(3,-4,7) և B(-5,-14,17) կետերից ամենափոքրն է:

72. Կոորդինատային Oxy հարթության վրա գտնել այն M կետը, որի հեռավորությունների գումարը A(-1,2,5) և B(11,-16,10) կետերից ամենափոքրն է:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ